Prof. Dr. R. Verch
Dr. T.-P. Hack

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik
Wintersemester 2017/18

Übungen zur Theoretischen Mechanik
Aufgabenblatt 4

Aufgabe 4.1 [Diese Aufgabe wird korrigiert und bewertet, Wert = 12 Punkte.]
Prüfen Sie, ob die folgenden Vektorfelder konservativ sind, d.h. ob sie ein Potential besitzen. Geben Sie in den entsprechenden Fällen Potentiale an. Die Vektorfelder sind definiert für $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, sofern sie sich von $\mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{0}\}$ auf ganz $\mathbb{R}^3$ stetig fortsetzen lassen; ansonsten sind sie definiert für $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{0}\}$.
Folgende Bezeichnungen werden verwendet: $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, $r = |\vec{x}\,|$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)^T$, $\vec{e}_r = \vec{x}/r$.

$$(a)\quad \vec{V}(\vec{x}) = -\frac{\vec{x}}{r^3} \qquad\qquad (b)\quad \vec{W}(\vec{x}) = \frac{\vec{e}_3}{r^3}$$

$$(c)\quad \vec{F}(\vec{x}) = \frac{\vec{e}_3}{r^3} - \frac{3x_3\vec{e}_r}{r^4} \qquad\qquad (d)\quad G(\vec{x}) = \vec{e}_r$$

$$(e)\quad \vec{L}(\vec{x}) = \left(\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}, -\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}, 0\right)^T \qquad\qquad (f)\quad \vec{M}(\vec{x}) = (x_2, -x_1, 0)^T$$

Aufgabe 4.2 [wird nicht korrigiert]
Es sei ein System aus N Teilchen mit Massen m_j und Bahnkurven $\vec{r}_{(j)}(t)$ gegeben. Wenn $G(t)$ eine mechanische Größe des Systems zur Zeit t ist, dann nennt man

$$\overline{G} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} G(t)\,dt$$

das *zeitliche Mittel* von G (sofern der Limes existiert).
Gehen Sie davon aus, dass es ein Potential $U(\vec{r}_{(1)}, \ldots, \vec{r}_{(N)})$ gibt, so dass die Kraft auf das j-te Teilchen gegeben ist durch $\vec{F}_{(j)} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_{(j)}} U(\vec{r}_{(1)}, \ldots, \vec{r}_{(N)})$.
Für Bahnkurven $\vec{r}_{(j)}(t)$, die Lösungen der Bewegungsgleichungen sind, sei definiert: $T(t) =$ gesammte kinetische Energie des Teilchensystems und $\vec{F}_{(j)}(t) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_{(j)}} U(\vec{r}_{(1)}(t), \ldots, \vec{r}_{(N)}(t))$.

/...2

Nehmen Sie an, dass die Bahnkurven für alle Zeiten in einem festen, endlichen Raumbereich bleiben und dass die Geschwindigkeiten aller Teilchen für alle Zeiten einen fest vorgegebenen Wert nicht überschreiten. Zeigen Sie, dass unter diesen Annahmen der *Virialsatz* gilt:

$$2\overline{T} = -\overline{\sum_{j=1}^{N} (\vec{r}_{(j)} \bullet \vec{F}_{(j)})}\,.$$

Was folgt spezieller in dem Fall, dass U homogen ist vom Grade s, d.h. dass für jedes $\lambda > 0$ gilt

$$U(\lambda\vec{r}_{(1)}, \ldots, \lambda\vec{r}_{(N)}) = \lambda^s U(\vec{r}_{(1)}, \ldots, \vec{r}_{(N)}) \quad ?$$

Aufgabe 4.3 [wird nicht korrigiert]

Gegeben seien die Vektorfelder

(1) $\quad \vec{V}(\vec{x}) = c\vec{x}\,, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3$

(2) $\quad \vec{W}(\vec{x}) = a\vec{x}/|\vec{x}\,|^3\,, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{0}\}$

(3)

$$\vec{Y}(\vec{x}) = b \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Dabei sind a, b, c positive Konstanten. Außerdem sind die folgenden Bahnkurven eines Teilchens gegeben:

(a)

$$\vec{k}(t) = \begin{pmatrix} R\sin(\omega t) \\ R\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \omega t \leq 2\pi$$

(b) $\quad \vec{y}(t) = \vec{k}(t) + 3R\vec{e}_1$

Dabei sind ω und R strikt positive Konstanten und $\vec{e}_1$ ist der Einheitsvektor in x_1-Koordinatenrichtung.

Berechnen Sie die Arbeitsintegrale $A_{\vec{r}}(t_2, t_1)$ jeweils für die Bahnkurven $\vec{r} = \vec{k}$ und $\vec{y}$ und die Kraftfelder $\vec{F} = \vec{V}, \vec{W}, \vec{Y}$, wobei $t_1 = 0$ und $t_2 = 2\pi/\omega$ gewählt wird (geschlossene Kurven).

Abgabe bis Mi., 08. Nov. 2017, vor der Vorlesung