Prof. Dr. R. Verch

Dr. T.-P. Hack

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Wintersemester 2017/18

Übungen zur Theoretischen Mechanik
Aufgabenblatt 3

Aufgabe 3.1 [diese Aufgabe wird korrigiert und bewertet, Wert = 12 Punkte]

Die Antares-Trägerrakete hat beim Start eine Masse von $285 \cdot 10^3\mathrm{kg}$. Die Brenndauer der ersten Antriebsstufe beträgt $235\mathrm{s}$, und die bei Brennschluss verbleibende Raketenmasse ist $43 \cdot 10^3\mathrm{kg}$. Die Verbrennungsgase treten mit einer Geschwindigkeit von etwa $3 \cdot 10^3\mathrm{m/s}$ aus dem Raketenmotor aus. Nehmen Sie an, die Rakete würde von der Erdoberfläche in senkrechter Richtung aufwärts fliegen, also entgegengesetzt zur Richtung des Erdschwerefelds.

(i) Welche Geschwindigkeit erreicht die Rakete bei Brennschluss der ersten Antriebsstufe ?

(ii) Welche Flughöhe erreicht die Rakete bei Brennschluss der ersten Antriebsstufe ?

(iii) Was ist der Ausdruck für die Schubkraft, die auf die Rakete wirkt ? Berechnen Sie die (mittlere) Schubkraft der ersten Antriebsstufe aus den angegebenen Daten und vergleichen Sie den erhaltenen Wert mit den Daten für die Antares-Tägerrakete (erhältlich auf `http://www.spaceflight101.com/antares-launch-vehicle-information.html`).

Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass das Erdschwerefeld homogen ist und 9,81$\mathrm{m/s}^2$ beträgt. Von Effekten, die von der Erdrotation oder von Luftwiderstandskräften herrühren, soll abgesehen werden. Die Bewegungsgleichung, die hier relevant ist, ist $d\vec{P}(t)/dt = \vec{F}^A$. Für den Fall der Rakete wurde ein Ausdruck für $d\vec{P}(t)/dt$ in der Vorlesung abgeleitet.

Aufgabe 3.2 [wird nicht korrigiert]

(a) Es seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ beliebige Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Prüfen Sie, ob dann für jede Drehmatrix D die Beziehung

$$(D\vec{a}) \times (D\vec{b}) = D(\vec{a} \times \vec{b})$$

gilt. Gilt eine solche Beziehung (für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$) für Matrizen D, die keine Drehmatrizen sind ?

(b) Überprüfen Sie für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aus $\mathbb{R}^3$ die Gültigkeit der Formel

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \bullet \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \bullet \vec{b})\,.$$

(c) Zeigen Sie, dass $||\vec{a} \times \vec{b}\,||$ übereinstimmt mit der Fläche des Parallelogramms, das von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

Hinweis zu (c): $||\vec{a} \times \vec{b}\,||$ stimmt bis auf Vorzeichen überein mit $(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{e}$ für einen Normalenvektor $\vec{e}$ der Ebene, die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird, der durch $||\vec{e}\,|| = 1$ normiert ist. Überlegen Sie, ob Teil (a) der Aufgabe zur Vereinfachung des Problems (c) verwendet werden kann.

/...2

Aufgabe 3.3 [wird nicht korrigiert]

Eine Masse (idealisiert punktförmig) von 30 kg sei am Ende eines starren Balkens befestigt. Das andere Ende des Balkens ist in einem Lager angebracht, so dass der Balken in einer vertikal ausgerichteten Ebene um eine *horizontale* Achse rotieren kann. Vereinfacht sei die Masse des Balkens als vernachlässigbar klein angenommen. Der Balken hat eine Länge R (in Metern). Die Anordnung befindet sich im homogenen Schwerefeld der Erde ($g = 9,81\,\mathrm{m/sec^2}$).

(1) Berechnen Sie das Drehmoment der Bahnkurve der Masse, bezogen auf den Lagerpunkt, abhängig von der Position der Masse (beschreiben Sie dazu die Bahnkurve der Masse mit Hilfe von ebenen Polarkoordinaten, so dass die Position der Masse bei festem R nur vom Polarwinkel φ abhängt).

(2) Bei $t = 0$ befinde sich die Masse um $5°$ gegenüber dem tiefstmöglichen Punkt gedreht und in Ruhe, und wird losgelassen. Bestimmen Sie die Differentialgleichung für die Änderung des Drehimpulses der Masse gegenüber der Anfangslage. Vereinfachen Sie diese Differentialgleichung zu einer Schwingungsgleichung durch eine geeignete lineare Näherung.

(3) Bestimmen Sie zu der Anfangsbedingung der Masse in (2) die Zeit t_1, nach der die Masse den tiefstmöglichen Punkt erreicht, in der Näherung der Schwingungsgleichung. Vergleichen Sie dies mit der Fallzeit der Masse von der Ausgangslage bis zum tiefstmöglichen Punkt.

Abgabe: Am Mittwoch, den 01.11.2017 vor der Vorlesung.