
Übungen zur Theoretischen Mechanik
Aufgabenblatt 2

Aufgabe 2.1 [diese Aufgabe wird korrigiert und bewertet, Wert = 12 Punkte]
Ein Flugzeug fliegt mit einer Geschwindigkeit v in x_1 -Koordinatenrichtung in einer Höhe h über dem Meer. An der Position $x_1 = R_S$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ befindet sich ein Schiffbrüchiger in einer Rettungsinsel auf dem Wasser. Aus dem Flugzeug soll ein Paket mit Überlebensausrüstung für den Schiffbrüchigen abgeworfen werden. Bei $t = 0$ befindet sich das Flugzeug an der Position $x_1 = R_F$, $x_2 = 0$, $x_3 = h$.

- (a) Stellen Sie die Newtonschen Bewegungsgleichungen für die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ des Pakets auf, wenn es zur Zeit $t = t_0 > 0$ aus dem Flugzeug abgeworfen wird. Es sei dabei angenommen, dass der Luftwiderstand vernachlässigt werden kann. Bestimmen Sie die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ als Lösung der Bewegungsgleichungen abhängig von den Anfangsbedingungen.
- (b) Gehen Sie aus von $|R_0 - R_S| = 6\text{km}$, $v = 50\text{m/s}$, $h = 60\text{m}$. Zu welchem Zeitpunkt t_0 muss das Paket abgeworfen werden, damit es genau auf der Rettungsinsel auftrifft? Wie weit ist das Flugzeug zu diesem Zeitpunkt in horizontaler Richtung von der Rettungsinsel entfernt?
- (c) Innerhalb welchen Zeitintervalls (t_-, t_+) um t_0 kann das Paket abgeworfen werden, damit es in höchstens 12m Entfernung von der Rettungsinsel auf die Wasseroberfläche trifft? (Daten wie in (b))

Aufgabe 2.2 [wird nicht korrigiert]
Die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ eines Massenpunkts in einem orthonormierten Bezugssystem (OBS) ist *kräftefrei*, wenn es Vektoren $\vec{v}_0$ und $\vec{r}_0$ in $\mathbb{R}^3$ gibt, so dass $\vec{r}(t) = \vec{v}_0 \cdot t + \vec{r}_0$. Es seien zwei ONBe gegeben, wobei das 'ungestrichene' ein Inertialsystem ist.

Zeigen Sie:

- (i) Wenn *jede* kräftefreie Bahnkurve $\vec{r}(t)$ eines Massenpunkts im 'ungestrichenen' System auch im 'gestrichenen' System als eine kräftefreie Bahnkurve $\vec{r}'(t)$ beschrieben wird, dann ist das 'gestrichene' System ebenfalls ein Inertialsystem, d.h. es gibt eine *konstante* Drehmatrix D und *konstante* Vektoren $\vec{w}$ und $\vec{k}$ im $\mathbb{R}^3$ derart dass

$$(\star) \quad \vec{r}'(t) = D\vec{r}(t) + \vec{w} \cdot t + \vec{k}$$

für jede kräftefreie Bahnkurve im 'ungestrichenen' System gilt. (Hieraus folgt, dass $(\star)$ für alle C^2 Bahnkurven gilt.)

/...2

- (ii) Wenn andererseits $(\star)$ für alle C^2 Bahnkurven mit *konstanten* D , $\vec{w}$ und $\vec{k}$ gilt, dann ist $\vec{r}'(t)$ kräftefrei für jede kräftefreie Bahnkurve $\vec{r}(t)$.

Hinweis: Gehen Sie von der Form der Transformation von Bahnkurven zwischen allgemeinen orthonormierten Bezugssystemen (absolut zeitparametrisiert) aus, die in der Vorlesung angegeben wurde.

Aufgabe 2.3

[wird nicht korrigiert]

Ein Hagelkorn (eine Eiskugel von $R = 1\text{cm}$ Radius) fällt aus einer Höhe h . Das Korn wird durch die Gravitationskraft beschleunigt und durch die Reibungskraft

$$\vec{F}_{\text{Rei}} = -\frac{1}{2}C_W\pi R^2 \varrho_L \dot{\vec{r}}|\dot{\vec{r}}|$$

gebremst, wobei ϱ_L die Luftdichte und $C_W \simeq 0,5$ den Luftwiderstandskoeffizienten bezeichnen. Für die hier gestellten Probleme soll von Effekten, die von der Erdrotation oder von Windgeschwindigkeiten herrühren, abgesehen werden, und die Luftdichte soll für beliebige Höhen als konstant angesehen werden und der Dichte auf Meereshöhe bei Normaldruck entsprechen.

- Stellen Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung für die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ des Hagelkorns auf mit der Anfangsbedingung, dass das Hagelkorn bei $t = 0$ ruht, bezogen auf ein (im Rahmen des Problems nährungsweises) Inertialsystem, das auf der Erdoberfläche ruht, wobei $\vec{e}_1$ in die West-Ost Richtung, $\vec{e}_2$ in die Süd-Nord Richtung, und $\vec{e}_3$ in die vertikale Richtung weist. Berücksichtigen Sie auch die Anfangsbedingungen für die Newtonsche Bewegungsgleichung.
- Wenn die Höhe h groß genug ist, dann erreicht das Hagelkorn eine maximale Grenzgeschwindigkeit v_{gr} , die dadurch definiert ist, dass die Reibungskraft und die Schwerkraft sich gerade kompensieren. Ermitteln Sie diese Grenzgeschwindigkeit.
- Lösen Sie die Bewegungsgleichung, d.h. bestimmen Sie $\vec{r}(t)$. Dafür ist es günstig, zunächst die Bewegungsgleichung für $\vec{r}(t)$ in eine Differentialgleichung für die Vertikalgeschwindigkeit des Hagelkorns umzuschreiben und diese zu integrieren, d.h. zu lösen. Eine weitere Integration der Lösung für die Vertikalgeschwindigkeit führt dann auf die Lösung für $\vec{r}(t)$ nach Festlegung der Integrationskonstanten.

Für die Integration der auftretenden Differentialgleichungen: Prüfen Sie unter Anwendung der Differentiationsregeln die Gültigkeit der folgenden Aussagen nach — dabei sind a, b strikt positive Konstanten und c_0, c_1 reelle Integrationskonstanten:

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{b}} \tanh(a\sqrt{b}t) + c_0 \quad \text{ist Lösung von} \quad \dot{y} = a(1 - by^2)$$

$$Y(t) = \frac{1}{ab} \ln(\cosh(a\sqrt{b}t)) + c_0t + c_1 \quad \text{ist Lösung von} \quad \dot{Y}(t) = \frac{1}{\sqrt{b}} \tanh(a\sqrt{b}t) + c_0$$

- Ermitteln Sie die Fallzeit t bis zum Erreichen von v_{gr} . Wird die Grenzgeschwindigkeit erreicht, wenn $h = 1\text{km}$ beträgt?

Abgabe: Am Mittwoch, den 25.10.2017 vor der Vorlesung.