Prof. Dr. R. Verch
Dr. M. Schmidt

UNIVERSITÄT LEIPZIG
Inst. f. Theoretische Physik
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Theoretischen Mechanik
Aufgabenblatt 12

Aufgabe 12.1 [Diese Aufgabe wird korrigiert und bewertet, Wert = 12 Punkte. Abgabe bis zum Donnerstag, 26.01.2017, vor der Vorlesung]
Im folgenden wird eine Transformation $\Psi_t : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ $(t \in \mathbb{R})$ geschrieben als

$$\Psi_t(\binom{q}{p}) = \binom{Q(q,p,t)}{P(q,p,t)}\,,$$

wobei die Funktionen Q und P Werte im $\mathbb{R}^f$ annehmen.

Prüfen Sie, ob die folgenden Transformationen der kanonischen Variablen $(q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f)$ kanonisch sind.

(a) $f = 1$, $Q(q,p) = pq + q^3$, $P(q,p) = p^2 + p/q$.

(b) $f = 2$, $\mu, k, \omega > 0$ sind konstante Parameter,

$$\begin{aligned}
Q_1(q_1, q_2, p_1, p_2, t) &= -\sqrt{\frac{2p_1}{k}}\sin(\mu(q_1 + t)) \\
Q_2(q_1, q_2, p_1, p_2, t) &= \cos(\omega t) q_2 + \sin(\omega t) p_2 \\
P_1(q_1, q_2, p_1, p_2, t) &= \frac{1}{\mu}\sqrt{2kp_1}\cos(\mu(q_1 + t)) \\
P_2(q_1, q_2, p_1, p_2, t) &= \sin(\omega t) q_2 - \cos(\omega t) p_2
\end{aligned}$$

(c) $f = 1$, $\kappa, \lambda > 0$ sind konstante Parameter,

$$Q(q,p,t) = -\frac{1}{\kappa}\arctan(\lambda q/p) - t\,, \quad P(q,p,t) = \frac{\kappa}{2\lambda}(p^2 + \lambda^2 q^2)\,.$$

Hinweis: $(\sin x)^2 = (\tan x)^2/(1 + (\tan x)^2)$.

/...2

Aufgabe 12.2 [wird nicht korrigiert]

Die Hamiltonfunktion eines Teilchens der Masse m im eindimensionalen harmonischen Oszillatorpotential ($\mathcal{P} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f = 1$) ist gegeben durch

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2$$

mit einer Konstanten $\omega > 0$.

(a) Bestimmen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen und geben Sie deren allgemeine Lösung an. Wieviele Integrationskonstanten sind für eine konkrete Lösung festzulegen?

(b) Es sei (q_0, p_0) ein Punkt im Phasenraum und $t \mapsto (q(t), p(t))$ sei eine Integralkurve des Hamiltonschen Vektorfeldes mit $(q(0), p(0)) = (q_0, p_0)$. Zeigen Sie, dass die Integralkurve (auch genannt Phasenraumkurve) eine Ellipse ist. Berechnen Sie deren Mittelpunkt sowie Größe und Richtung der Halbachsen. Skizzieren Sie die Umlaufrichtung.
(Hinweis: Es ist ratsam, zunächst die Kurve $(\xi(t), \eta(t)) = (\sqrt{m\omega}q(t), p(t)/\sqrt{m\omega})$ anstelle von $(q(t), p(t))$ zu betrachten.)

(c) Betrachten Sie für $t = 0$ das rechteckige Phasenraumgebiet $|q| \leq 1$, $-1 \leq p/m\omega \leq 2$. In welche Phasenraumgebiete wird dieses unter dem Fluss des Hamiltonschen Vektorfelds zu den Zeiten $t = \pi/4\omega$, $t = \pi/3\omega$ transformiert (Skizze)? Berechnen Sie die Größe der transformierten Gebiete.

Aufgabe 12.3 [wird nicht korrigiert]

Es wird ein harmonischer Oszillator in einer Dimension betrachtet, der einer schwachen Dämpfung durch eine Reibungskraft $F_R(\dot{x}) = -\gamma\dot{x}$ unterliegt, wobei x die Auslenkung des Oszillators aus der Ruhelage bezeichnet und $\gamma > 0$ eine Konstante ist. Zeigen Sie, dass das Volumen eines Phasenraumgebietes unter den Phasenraumabbildungen Ψ_t exponentiell für $t \to \infty$ gegen Null geht, unter der Annahme, dass die Phasenraumabbildungen $\Psi_t : (q_0, p_0) \mapsto (q(t), p(t))$ sich in der Weise darstellen, dass jeder Lösung $x(t)$ der Bewegungsgleichung die Phasenraumkurve $q(t) = x(t)$, $p(t) = \dot{x}(t) + \gamma x(t)$ zugeordnet wird.