Prof. Dr. R. Verch
Dr. M. Schmidt

UNIVERSITÄT LEIPZIG
**Inst. f. Theoretische Physik**
Wintersemester 2016/17

# Übungen zur Theoretischen Mechanik
## Aufgabenblatt 10

**Aufgabe 10.1** [Diese Aufgabe wird korrigiert und bewertet, Wert = 12 Punkte. Abgabefrist bis Donnerstag, 12.01.2017, vor Beginn der Vorlesung.]

Ein homogenes (idealisiert unendlich dünnes) Seil der Masse $m$ und Lange $\ell$ rutscht reibungsfrei über die Kante eines Tisches ab. Die Bewegung Seils erfolgt dabei senkrecht zur Tischkante.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf: (i) indem Sie eine Lagrangefunktion für das System angeben und die Euler-Lagrange-Gleichungen bilden, (ii) unter Verwendung einer Kräftegleichung.

(b) Es sei $h$ die Höhe des Tisches. Lösen Sie die Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingung, dass zur Zeit $t = 0$ das Seil losgelassen wird, wobei ein Stück der Länge $\ell_0 < \ell$ ($\ell_0 \leq h$) vom Tisch herunterhängt. Zu welcher Zeit $t_b$ erreicht das untere Seilende den Boden? (Unterscheiden Sie die Fälle $h > \ell$ und $h \leq \ell$.)

**Aufgabe 10.2** [wird nicht korrigiert]

Es sei $\underset{\sim}{x}_t : Q \to \mathcal{F}_t$ eine Koordinatisierungsabbildung für ein $N$-Teilchen-System mit holonomen Zwangsbedingungen und konservativen eingeprägten Kräften, sowie $t \mapsto q(t) \in Q$ eine zeitparametrisierte Kurve im Konfigurationsraum $Q \subset \mathbb{R}^f$.

Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) Die räumlichen Bahnkurven $\underset{\sim}{r}(t) = \underset{\sim}{x}_t(q(t))$ des Teilchensystems erfüllen die Newtonschen Bewegungsgleichungen und die Zwangsbedingungen bei Gültigkeit des d'Alembertschen Prinzips, d.h. es gilt

$$\text{(a.i)} \quad \underset{\sim}{r}(t) \in \mathcal{F}_t \qquad \text{und} \qquad \text{(a.ii)} \quad \Big(\dot{\underset{\sim}{p}}(t) + \nabla_{\underset{\sim}{r}} U(t, \underset{\sim}{r}(t))\Big) \bullet \underset{\sim}{\xi} = 0$$

für alle $\underset{\sim}{\xi} \in T_{\underset{\sim}{r}(t)}\mathcal{F}_t$, zu jeder Zeit $t$.

(b) Die Kurve $q(t)$ erfüllt die Euler-Lagrange-Gleichungen, oder Lagrange-Gleichungen 2. Art,

$$\frac{d}{dt}\Big((\tfrac{\partial}{\partial \dot{q}_n} L)(t, q(t), \dot{q}(t))\Big) - (\tfrac{\partial}{\partial q_n} L)(t, q(t), \dot{q}(t)) = 0$$

für alle $n = 1, \ldots, f$, zu jeder Zeit $t$, für die Lagrangefunktion

$$L(t, q, \dot{q}) = T(t, q, \dot{q}) - U(t, \underset{\sim}{x}_t(q(t)))\,.$$

/...2

**Aufgabe 10.3** [wird nicht korrigiert]

Zwei Massenpunkte mit Massen $m_1$ und $m_2$ seien durch einen masselosen Faden der Länge $\ell$ verbunden, der durch ein Loch in einer Tischplatte geführt wird. Der herunterhängende Massenpunkt $m_2$ kann sich unter dem Einfluss der Schwerkraft nur in vertikaler Richtung bewegen, der andere Massenpunkt kann sich auf der Tischplatte uneingeschränkt bewegen (ohne Einfluss von Reibung; die Tischplatte ist senkrecht zur Richtung der Schwerkraft ausgerichtet).

(a) Welcher Typ von Zwangsbedingungen liegt hier vor und wieviele Freiheitsgrade hat das System?

(b) Wählen Sie geeignete verallgemeinerte Koordinaten und geben Sie eine Lagrangefunktion an.

(c) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen. Untersuchen Sie, welche Symmetrien die Lagrangefunktion besitzt, und schliessen Sie daraus auf die Erhaltungsgrößen (Integrale der Bewegung) des Systems.

(d) Diskutieren Sie, für welche Anfangsbedingungen bzw. Bedingungen an $m_1$ und $m_2$

(i) $m_2$ zu allen Zeiten in Ruhe bleibt, (ii) $m_2$ nach endlicher Zeit in Ruhe bleibt, (iii) $m_1$ nach endlicher Zeit in Ruhe bleibt.