Prof. Dr. R. Verch
Dr. G. Lechner

UNIVERSITÄT LEIPZIG
Inst. f. Theoretische Physik
Wintersemester 2014/15

Übungen zu TP1-Staatsexamen Lehramt
Große Hausaufgabe

Das Erreichen von 50% (entsprechend 20 Punkten) der Punkte der Großen Hausaufgabe ist erforderlich für die Zulassung zur Klausur (Modulprüfung). Die Abgabefrist für die Bearbeitungen endet am Montag, 19.01.2015, zu Beginn des Übungsseminars.

A - Fragen zum Inhalt der Vorlesung (und der Übungen). Beantworten Sie die folgenden Fragen knapp aber möglichst treffend. Verwenden Sie Formeln und Skizzen. Erklären Sie die Bedeutung der Formelsymbole. Die Antwort einer Frage soll nicht mehr als eine Seite in Anspruch nehmen. Wenn Beweise von Sachverhalten erbracht werden sollen, so wird dies in der Frage betont.
Der Wert jeder Frage beträgt 4 Punkte.

(A.1) Was ist der Runge-Lenz-Vektor? Unter welchen Bedingungen ist er eine Erhaltungsgröße? Ist der Runge-Lenz-Vektor im Fall von Planetenbahnen erhalten? Woran kann dies erkannt werden?

(A.2) Erläutern Sie (mit Beweis) den Energiesatz für ein massives Teilchen, das der Newtonschen Bewegungsgleichung genügt und sich in einem konservativen Kraftfeld bewegt.

(A.3) Wie ist der Gesamtdrehimpuls eines Systems aus N Teilchen definiert? Unter welchen Bedingungen ist er eine Erhaltungsgröße?

(A.4) Welche Situation bezeichnet man als elastischen Stoß von materiellen Objekten? Was ist dagegen ein inelastischer Stoß? Welche Größen sind beim elastischen Stoß zweier ideal harter Kugeln erhalten?

/...2

B - zu lösende Aufgaben

Lösen Sie 2 der folgenden 4 Aufgaben. Wenn Sie mehr als 2 Aufgaben bearbeiten, werden nur die besten 2 Bearbeitungen für die Gesamtpunktzahl gezählt.

(B.1) [12 Punkte]

Eine Masse (idealisiert punktförmig) von 30 kg sei am Ende eines starren Balkens befestigt. Das andere Ende des Balkens ist in einem Lager angebracht, so dass der Balken in der horizontalen Ebene um die *vertikale* Achse rotieren kann. Vereinfacht sei die Masse des Balkens als vernachlässigbar klein angenommen. Der Balken hat eine Länge von $1,5\,\mathrm{m}$.

(i) Die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ des Balkens mit Masse wird durch eine Vorrichtung gleichmässig mit einer Rate von $10°$ pro $(\mathrm{sec})^2$ beschleunigt. Berechnen Sie das Drehmoment der Bahnkurve der Masse bezogen auf den Lagerpunkt des Balkens.

(ii) Der Balken rotiere anfangs mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit von $60°$ pro Sekunde. Der Masse wird zur Zeit t_0 ein Hindernis entgegengestellt, so dass die Drehbewegung innerhalb von $1/100\,\mathrm{sec}$ gestoppt wird. Berechnen Sie das Drehmoment der Bahnkurve der Masse (bezogen auf den Lagerpunkt des Balkens).

(iii) Zusätzlich zu der Masse am Ende des Balkens sei eine weitere (idealisiert punktförmige) Masse von 40 kg an dem Balken angebracht, in einem Abstand von 0,5 m vom Lagerpunkt. Der Balken rotiere anfangs mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit von $60°$ pro Sekunde. Dem Balken wird zur Zeit t_0 ein Hindernis entgegengestellt, das den Balken in einem Abstand r_0 vom Lagerpunkt trifft und die Drehbewegung innerhalb von $1/100\,\mathrm{sec}$ stoppt. Wie muss r_0 gewählt werden, damit die Belastung des Lagers möglichst gering ist?

(B.2) [12 Punkte]

Das Raumschiff der Astronautin Sandy befindet sich auf einer Umlaufbahn um die Erde, deren höchster Punkt (Apogäum) 1000 km und deren tiefster Punkt (Perigäum) 300 km über der Erdoberfläche liegen. Als Sandy sich gerade außerhalb des Raumschiffs aufhält, bemerkt sie mit Schrecken, dass ihr Raumschiff vom Trümmerteil eines Satelliten getroffen wird. Dieser Zusammenstoß ereignet sich genau am tiefsten Punkt der Umlaufbahn des Raumschiffs. Nehmen Sie an, dass sich das Trümmerteil unmittelbar vor dem Zusammenstoß mit genau der entgegengesetzten Geschwindigkeit des Raumschiffs bewegt (die Beträge der Geschwindigkeiten unmittelbar vor dem Zusammenstoß sind also gleich) und dass die Masse des Trümmerteils ein Zehntel der Raumschiffmasse beträgt. Stürzt der entstehende Klumpen Weltraumschrott aus Raumschiff und Trümmerteil auf die Erde?

/...3

Hinweise:

(i) Die Erde wird näherungsweise als in einem Inertialsystem ruhend betrachtet.

(ii) Von allen durch die Erdatmosphäre bedingten Effekten soll abgesehen werden.

(iii) Sie können benutzen, dass das Gravitationspotential außerhalb des Erdradius durch ein Newtonsches Zentralpotential beschrieben wird. Wenden Sie Erhaltungssätze für diese Situation an.

(iv) Der Zusammenstoß von Raumschiff und Trümmerteil soll idealisiert als zentraler inelastischer Stoß beschrieben werden. Sie können benutzen, dass die Geschwindigkeit eines Objekts, das beim zentralen inelastischen Stoß zweier Massen m_1 und m_2 mit den jeweiligen Geschwindigkeiten $\vec{v}_{(1)}$ und $\vec{v}_{(2)} = \alpha \vec{v}_{(1)}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ entsteht, gegeben ist durch

$$\vec{v} = \left(\frac{m_1 + \alpha m_2}{m_1 + m_2} \right) \vec{v}_{(1)} \, .$$

(B.3) [12 Punkte]

(a) Ein Planet sei vereinfacht beschrieben als eine Kugel mit Radius R und homogener Massenverteilung der Gesamtmasse M. Zeigen Sie, dass das von dem Planeten im Außenraum hervorgerufene Gravitationsfeld übereinstimmt mit dem Gravitationsfeld, das eine idealisiert im Mittelpunkt des Planeten punktförmig konzentrierte Masse M erzeugen würde.

(b) Nehmen Sie an, dass die Massendichte des Planeten beschrieben wird durch eine stetige Funktion $\varrho(r) \geq 0$, wobei $r \in [0, R]$ der Abstand vom Mittelpunkt des Planeten ist. Gilt die Aussage, die in (a) gezeigt werden soll, dann auch?

(c) Nehmen Sie an, dass der Außenraum einer leeren Kugel mit dem Radius R mit einer sphärisch symmetrischen Massenverteilung (mit Massendichte $\varrho(r) \geq 0$, wobei $r > R$ der Abstand vom Mittelpunkt der Hohlkugel) erfüllt ist ("Hohlwelt"). Welches Gravitationsfeld ergibt sich im Innenraum der Kugel?

(B.4) [12 Punkte]

Ein Hagelkorn (eine Eiskugel von $R = 1$cm Radius) fällt aus 1 km Höhe. Das Korn wird durch die Gravitationskraft beschleunigt und durch die Reibungskraft

$$\vec{F}_{\texttt{Rei}} = -\tfrac{1}{2} C_W \pi R^2 \varrho_L \dot{\vec{r}} ||\dot{\vec{r}}||$$

gebremst, wobei ϱ_L die Luftdichte und $C_W \simeq 0,5$ den Luftwiderstandskoeffizienten bezeichnen. Stellen Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung auf mit der Anfangsbedingung, dass das Hagelkorn bei $t = 0$ ruht. Lösen Sie das Anfangswertproblem der Newtonschen Bewegungsgleichung und bestimmen Sie die Geschwindigkeit, mit der das Hagelkorn auf die Erdoberfläche trifft. (Sie dürfen eine asymptotische Form der Bahnkurve zur Bestimmung der Flugzeit benutzen.) Wie verhält sich die Auftreffgeschwindigkeit bei Variation von R, z.B. wenn R verdoppelt wird? [Von Effekten, die von der Erdrotation herrühren, soll abgesehen werden.]