
Übungen zu TP1-Staatsexamen Lehramt Aufgabenblatt 11

Aufgabe 11.1

In der Vorlesung wurde

$$\mathcal{G}(t, s) = \theta(t - s) \frac{e^{-\varrho(t-s)}}{\Omega} \sin(\Omega(t - s)) \quad (t, s \in \mathbb{R})$$

mit $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \varrho^2}$ und der Heaviside-Funktion

$$\theta(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \geq 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases}$$

als Green-Funktion der inhomogenen Oszillatorgleichung

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\varrho\frac{d}{dt}y(t) + \omega_0^2y(t) = f(t)$$

angegeben.

(a) Es sei für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$:

$$f_{a,b}(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t \in [a, b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wie verhält sich die Lösung

$$y_{a,b}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(t, s) f_{a,b}(s) ds$$

der inhomogenen Oszillatorgleichung bezüglich ihres Abweichens von einer Lösung der homogenen Oszillatorgleichung bei Veränderung von a und b ? Inwiefern sorgt das Auftreten des Terms $\theta(t - s)$ in $\mathcal{G}(t, s)$ dafür, dass eine Änderung von $y_{a,b}$ in kausaler Abhängigkeit (d.h. zeitlich gesehen nach) einer Änderung von $f_{a,b}(t)$ erfolgt? — Zeigen Sie, dass die Lösung $y_{a,b}(t)$ der inhomogenen Schwingungsgleichung mit Quelle $f_{a,b}(t)$ erst für Zeiten $t > a$ von einer Lösung der homogenen Schwingungsgleichung abweicht.

/...2

(b) Berechnen Sie die Lösung $y_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(t, s) f(s) ds$ für die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} f_0 e^{-\alpha t} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

für Konstanten $f_0 > 0$, $\alpha > 0$. Untersuchen Sie die Grenzfälle $\alpha \rightarrow 0$ und $\alpha \rightarrow \varrho$.

Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty} \theta(t-s) h(t, s) ds = \int_{-\infty}^t h(t, s) ds$.

Aufgabe 11.2

Eine Punktmasse m , die sich in der x - y -Ebene bewegen kann, sei an drei (idealisiert masselosen) Federn befestigt. Jede der Federn hat die Federkonstante D und die entspannte Länge $\sqrt{2}$ in den Längeneinheiten des Koordinatensystems. Mit ihrem anderen Ende sind die Federn jeweils an den Punkten $(-1, 1)$, $(1, 1)$ und $(-1, -1)$ in der x - y -Ebene befestigt.

- (a) Geben Sie die Schwingungsgleichung der Masse um die Gleichgewichtslage (Ruhelage) an.
- (b) Berechnen Sie die Eigenfrequenzen für kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage.
- (c) Geben Sie die zu den Eigenfrequenzen gehörenden Eigenvektoren an. Interpretieren Sie die entsprechenden Normalmoden anschaulich.

Wert jeder Aufgabe = 12 Punkte

Abgabe: Bis Montag, 19. Januar 2015, vor Beginn des Übungsseminars.