Prof. Dr. R. Verch
Dr. G. Lechner

UNIVERSITÄT LEIPZIG
Inst. f. Theoretische Physik
Wintersemester 2014/15

Übungen zu TP1-Staatsexamen Lehramt
Aufgabenblatt 9

Aufgabe 9.1

Skizzieren Sie den Verlauf des effektiven Potentials $U_{\text{eff},\ell_0}(r)$ zu gegebenem Drehimpuls ℓ_0 und erläutern Sie anhand dessen, für welche Werte E der Gesamtenergie gebundene Bahnen als Lösung der Bewegungsgleichung möglich sind, bzw. welche maximale oder minimale Ausdehnung der Bahnkurven erreicht werden kann, für die folgenden Fälle:

(a) $U(r) = -C/r$, $C > 0$, für $\ell_0 > 0$

(b) $U(r) = -C/r$, $C > 0$, für $\ell_0 = 0$

(c) $U(r) = -C/r^2$, $C > 0$. Beachten Sie dabei unterschiedliches Verhalten für $\ell_0 < \sqrt{2\mu C}$ und für $\ell_0 > \sqrt{2\mu C}$.

Aufgabe 9.2

Zwei idealisiert punktartige Massen m und M bewegen sich unter dem Einfluss einer gegenseitigen konservativen Zentralkraft mit dem Potential $U(r)$, $r = ||\vec{r}||$, wobei $\vec{r}$ der Vektor der Relativbewegung ist.

(a) Der Drehimpuls einer finiten Bahnkurve $\vec{r}(t)$ sei $\vec{\ell} = \ell\vec{e}_3$, $\ell > 0$. Zeigen Sie, dass für die Perihelverschiebung der Bahnkurve die (in der VL ohne Beweis angegebene) Formel

$$\Delta\varphi = 2\int_{\tilde{r}_{min}}^{\tilde{r}_{max}} \frac{\ell}{r^2[E - U_{\text{eff},\ell}(r)]^{1/2}}\, dr$$

gültig ist. Dabei ist E die Gesamtenergie der Bahnkurve und $U_{\text{eff},\ell}(r)$ ist das effektive Potential.

Hinweis: In der Vorlesung wurde für das Newtonsche Potential eine Differentialgleichung angegeben für $\tilde{r}(\varphi)$, den Bahnradius in Abhängigkeit vom Polarwinkel φ. Argumentieren Sie analog für ein allgemeines Potential und ermitteln Sie daraus eine Differentialgleichung für den Polarwinkel in Abhängigkeit des Bahnradius.

(b) Betrachten Sie das Zentralpotential

$$U(r) = -\frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} \quad (r > 0)\,,$$

wobei A und B positive reelle Konstanten (in geeigneten Einheiten) sind, und berechnen Sie die Perihelverschiebung $\Delta\varphi$ für in Abhängigkeit von A und B.

/...2

Aufgabe 9.3

Das Raumschiff der Astronautin Sandy befindet sich auf einer Umlaufbahn um die Erde, deren höchster Punkt (Apogäum) 1000 km und deren tiefster Punkt (Perigäum) 300 km über der Erdoberfläche liegen. Als Sandy sich gerade außerhalb des Raumschiffs aufhält, bemerkt sie mit Schrecken, dass ihr Raumschiff vom Trümmerteil eines Satelliten getroffen wird. Dieser Zusammenstoß ereignet sich genau am tiefsten Punkt der Umlaufbahn des Raumschiffs. Nehmen Sie an, dass sich das Trümmerteil unmittelbar vor dem Zusammenstoß mit genau der entgegengesetzten Geschwindigkeit des Raumschiffs bewegt (die Beträge der Geschwindigkeiten unmittelbar vor dem Zusammenstoß sind also gleich) und dass die Masse des Trümmerteils ein Zehntel der Raumschiffmasse beträgt. Stürzt der entstehende Klumpen Weltraumschrott aus Raumschiff und Trümmerteil auf die Erde?

Hinweise:

(i) Die Erde wird näherungsweise als in einem Inertialsystem ruhend betrachtet.

(ii) Von allen durch die Erdatmosphäre bedingten Effekten soll abgesehen werden.

(iii) Sie können benutzen, dass das Gravitationspotential außerhalb des Erdradius durch ein Newtonsches Zentralpotential beschrieben wird (vgl. Aufgabe 8.2). Wenden Sie Erhaltungssätze für diese Situation an.

(iv) Der Zusammenstoß von Raumschiff und Trümmerteil soll idealisiert als zentraler inelastischer Stoß beschrieben werden. Sie können benutzen, dass die Geschwindigkeit eines Objekts, das beim zentralen inelastischen Stoß zweier Massen m_1 und m_2 mit den jeweiligen Geschwindigkeiten $\vec{v}_{(1)}$ und $\vec{v}_{(2)} = \alpha\vec{v}_{(1)}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ entsteht, gegeben ist durch

$$\vec{v} = \left(\frac{m_1 + \alpha m_2}{m_1 + m_2}\right)\vec{v}_{(1)}\,.$$

Wert jeder Aufgabe = 12 Punkte

Abgabe: Bis Montag, 15.12.2014, vor dem Übungsseminar