Prof. Dr. R. Verch
Dr. G. Lechner

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik
Wintersemester 2014/15

Übungen zu TP1-Staatsexamen Lehramt
Aufgabenblatt 7

Aufgabe 7.1

Prüfen Sie, ob die folgenden Vektorfelder konservativ sind, d.h. ob sie ein Potential besitzen. Geben Sie in den entsprechenden Fällen Potentiale an. Die Vektorfelder sind definiert für $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, sofern sie sich von $\mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{0}\}$ auf ganz $\mathbb{R}^3$ stetig fortsetzen lassen; ansonsten sind sie definiert für $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{0}\}$.
Folgende Bezeichnungen werden verwendet: $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, $r = ||\vec{x}\,||$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)^T$, $\vec{e}_r = \vec{x}/r$.

$$(a) \quad \vec{V}(\vec{x}) = -\frac{\vec{x}}{r^3} \qquad\qquad (b) \quad \vec{W}(\vec{x}) = \frac{\vec{e}_3}{r^3}$$

$$(c) \quad \vec{F}(\vec{x}) = \frac{\vec{e}_3}{r^3} - \frac{3x_3\vec{e}_r}{r^4} \qquad\qquad (d) \quad G(\vec{x}) = \vec{e}_r$$

$$(e) \quad \vec{L}(\vec{x}) = \left(\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, -\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, 0\right)^T \qquad\qquad (f) \quad \vec{M}(\vec{x}) = (x_2, -x_1, 0)^T$$

Aufgabe 7.2

Ein punktartiges Teilchen mit Masse m bewege sich unter dem Einfluss einer Zentralkraft der Form

$$\vec{F}(\vec{r}\,) = -k \cdot \vec{r} \quad (\vec{r} \in \mathbb{R}^3)\,,$$

wobei $k > 0$ (in geeigneten physikalischen Einheiten) eine Konstante ist. Weisen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussagen nach:

(a) Die Energie und der Drehimpuls des Teilchens sind Erhaltungsgrößen.

(b) Die Bahn des Teilchens liegt in einer festen (zeitunabhängigen) Ebene und der Verbindungsvektor $\vec{r}(t)$ vom Koordinatenursprung zum Teilchen überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

(c) Die möglichen Bahnkurven des Testteilchens sind (eventuell entartete) Ellipsen mit Mittelpunkt bei $\vec{r} = \vec{0}$.

(d) Die Umlaufzeiten aller Bahnkurven sind gleich.

(e) An den Punkten mit dem größten Abstand vom Bahnmittelpunkt (Apozentren) ist die Geschwindigkeit des Teilchens am geringsten.

/...2

Aufgabe 7.3

Bei Abwesenheit äußerer Kräfte lauten die Bewegungsgleichungen für die Bahnkurven $\vec{r}_{(1)}(t)$ und $\vec{r}_{(2)}(t)$ eines Systems zweier punktartiger Teilchen mit den Massen m_1 und m_2 bei zentralen konservativen inneren Kräften

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\vec{r}}_{(1)}(t) &= f(||\vec{r}_{(1)}(t) - \vec{r}_{(2)}(t)||) \cdot (\vec{r}_{(1)}(t) - \vec{r}_{(2)}(t)) \\ m_2\ddot{\vec{r}}_{(2)}(t) &= -f(||\vec{r}_{(1)}(t) - \vec{r}_{(2)}(t)||) \cdot (\vec{r}_{(1)}(t) - \vec{r}_{(2)}(t))\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass diese Bewegungsgleichungen äquivalent sind zu den Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \mu\ddot{\vec{r}}(t) &= f(||\vec{r}(t)||) \cdot \vec{r}(t) \\ \ddot{\vec{R}}(t) &= \vec{0} \end{aligned}$$

für die Relativkoordinaten $\vec{r} = \vec{r}_{(1)} - \vec{r}_{(2)}$ und die Schwerpunktskoordinate $\vec{R}$, wobei $\mu = m_1 \cdot m_2/(m_1 + m_2)$ die reduzierte Masse des Systems ist.

Wert jeder Aufgabe = 12 Punkte.

Abgabe: Bis Montag, 01.12.2014, vor dem Übungsseminar