Prof. Dr. R. Verch
Dr. G. Lechner

UNIVERSITÄT LEIPZIG
Inst. f. Theoretische Physik
Wintersemester 2013/14

Übungen zu TP1-Staatsexamen Lehramt
Aufgabenblatt 6

Aufgabe 6.1 Gegeben seien die Vektorfelder

(1) $\vec{V}(\vec{x}) = c\vec{x}\,, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3$

(2) $\vec{W}(\vec{x}) = a\vec{x}/||\vec{x}||^3\,, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{0}\}$

(3)
$$\vec{Y}(\vec{x}) = b\begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_1x_2x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Dabei sind a, b, c positive Konstanten. Außerdem sind die folgenden Bahnkurven eines Teilchens gegeben:

(a)
$$\vec{k}(t) = \begin{pmatrix} R\sin(\omega t) \\ R\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \omega t \leq 2\pi$$

(b) $\vec{y}(t) = \vec{k}(t) + 3R\vec{e}_1$

Dabei sind ω und R strikt positive Konstanten und $\vec{e}_1$ ist der Einheitsvektor in x_1-Koordinatenrichtung.

Berechnen Sie die Arbeitsintegrale $A_{\vec{r}}(t_2, t_1)$ jeweils für die Bahnkurven $\vec{r} = \vec{k}$ und $\vec{y}$ und die Kraftfelder $\vec{F} = \vec{V}, \vec{W}, \vec{Y}$, wobei $t_1 = 0$ und $t_2 = 2\pi/\omega$ gewählt wird (geschlossene Kurven).

Aufgabe 6.2 Für ein (stetig differenzierbares) Vektorfeld

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\vec{x}) \\ F_2(\vec{x}) \\ F_3(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

gegeben auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ wird definiert:

$$\operatorname{div} \vec{F}(\vec{x}) = (\vec{\nabla} \bullet \vec{F})(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} F_j(\vec{x}) \quad \textit{Divergenz} \text{ von } \vec{F}\,.$$

/...2

Für eine (zweimal stetig differenzierbare) $\mathbb{R}$-wertige Funktion $f(\vec{x})$ gegeben auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ wird definiert:

$$\Delta f(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f(\vec{x}) \quad \textit{Laplace-Operator}\,.$$

Für ein (zweimal stetig differenzierbares) Vektorfeld $\vec{F}$ wird $\Delta\vec{F}$ definiert als das Vektorfeld mit den Koordinatenkomponenten ΔF_j, $j = 1, 2, 3$.
Überprüfen Sie die folgenden Beziehungen für Vektorfelder $\vec{F}$ und $\vec{G}$ sowie $\mathbb{R}$-wertige Funktionen f und g (beliebig hoher Grad an Differenzierbarkeit darf vorausgesetzt werden):

(1) $\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$

(2) $\mathrm{div}(f\vec{F}) = f\mathrm{div}\vec{F} + ((\vec{\nabla}f) \bullet \vec{F})$

(3) $(\vec{\nabla} \bullet (\vec{F} \times \vec{G})) = ((\vec{\nabla} \times \vec{F}) \bullet \vec{G}) - (\vec{F} \bullet (\vec{\nabla} \times \vec{G}))$

(4) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}(\mathrm{div}\vec{F}) - \Delta\vec{F}$

(5) $\mathrm{div}(\vec{\nabla}f) = \Delta f$

Aufgabe 6.3 Es sei ein System aus N Teilchen mit Massen $m_{(j)}$ und Bahnkurven $\vec{r}_{(j)}(t)$ gegeben. Wenn $G(t)$ eine mechanische Größe des Systems zur Zeit t ist, dann nennt man

$$\overline{G} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} G(t)\,dt$$

das *zeitliche Mittel* von G (sofern der Limes existiert).
Gehen Sie davon aus, dass es ein Potential $U(\vec{r}_{(1)}, \dots, \vec{r}_{(N)})$ gibt, so dass die Kraft auf das j-te Teilchen gegeben ist durch $\vec{F}_{(j)} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_{(j)}} U(\vec{r}_{(1)}, \dots, \vec{r}_{(N)})$.
Für Bahnkurven $\vec{r}_{(j)}(t)$, die Lösungen der Bewegungsgleichungen sind, sei definiert: $T(t) =$ gesammte kinetische Energie des Teilchensystems und $\vec{F}_{(j)}(t) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_{(j)}} U(\vec{r}_{(1)}(t), \dots, \vec{r}_{(N)}(t))$.
Nehmen Sie an, dass die Bahnkurven für alle Zeiten in einem festen, endlichen Raumbereich bleiben und dass die Geschwindigkeiten aller Teilchen für alle Zeiten einen fest vorgegebenen Wert nicht überschreiten. Zeigen Sie, dass unter diesen Annahmen der *Virialsatz* gilt:

$$2\overline{T} = -\overline{\sum_{j=1}^{N} (\vec{r}_{(j)} \bullet \vec{F}_{(j)})}\,.$$

Was folgt spezieller in dem Fall, dass U homogen ist vom Grade s, d.h. dass für jedes $\lambda > 0$ gilt

$$U(\lambda\vec{r}_{(1)}, \dots, \lambda\vec{r}_{(N)}) = \lambda^s U(\vec{r}_{(1)}, \dots, \vec{r}_{(N)}) \;\; ?$$

Wert jeder Aufgabe: 12 Punkte

Abgabe: Bis Montag, 24.11.2014, vor dem Übungsseminar