Prof. Dr. R. Verch
Dr. G. Lechner

UNIVERSITÄT LEIPZIG
Inst. f. Theoretische Physik
Wintersemester 2014/15

Übungen zu TP1-Staatsexamen Lehramt
Aufgabenblatt 4

Aufgabe 4.1
(a) Es seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ beliebige Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Prüfen Sie, ob dann für jede Drehmatrix D die Beziehung

$$(D\vec{a}) \times (D\vec{b}) = D(\vec{a} \times \vec{b})$$

gilt. Gilt eine solche Beziehung (für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$) für Matrizen D, die keine Drehmatrizen sind?

(b) Überprüfen Sie für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aus $\mathbb{R}^3$ die Gültigkeit der Formel

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \bullet \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \bullet \vec{b})\,.$$

(c) Zeigen Sie, dass $||\vec{a} \times \vec{b}\,||$ übereinstimmt mit der Fläche des Parallelogramms, das von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

Hinweis zu (c): $||\vec{a} \times \vec{b}\,||$ stimmt bis auf Vorzeichen überein mit $(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{e}$ für einen Normalenvektor $\vec{e}$ der Ebene, die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird, der durch $||\vec{e}\,|| = 1$ normiert ist. Überlegen Sie, ob Teil (a) der Aufgabe zur Vereinfachung des Problems (c) verwendet werden kann.

Aufgabe 4.2
Die Antares-Trägerrakete hat beim Start eine Masse von $285 \cdot 10^3 \mathrm{kg}$. Die Brenndauer der ersten Antriebsstufe beträgt $235\mathrm{s}$, und die bei Brennschluss verbleibende Raketenmasse ist $43 \cdot 10^3 \mathrm{kg}$. Die Verbrennungsgase treten mit einer Geschwindigkeit von etwa $3 \cdot 10^3 \mathrm{m/s}$ aus dem Raketenmotor aus. Nehmen Sie an, die Rakete würde von der Erdoberfläche in senkrechter Richtung aufwärts fliegen, also entgegengesetzt zur Richtung des Erdschwerefelds.

(i) Welche Geschwindigkeit erreicht die Rakete bei Brennschluss der ersten Antriebsstufe?

(ii) Welche Flughöhe erreicht die Rakete bei Brennschluss der ersten Antriebsstufe?

/...2

(iii*) (*nicht prüfungsrelevant*) Was ist der Ausdruck für die Schubkraft, die auf die Rakete wirkt? Berechnen Sie die (mittlere) Schubkraft der ersten Antriebsstufe aus den angegebenen Daten und vergleichen Sie den erhaltenen Wert mit den Daten für die Antares-Trägerrakete (erhältlich auf `http://www.spaceflight101.com/antares-launch-vehicle-information.html`).

Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass das Erdschwerefeld homogen ist und 9,81$\mathrm{m/s^2}$ beträgt. Von Effekten, die von der Erdrotation oder von Luftwiderstandskräften herrühren, soll abgesehen werden. Die Bewegungsgleichung, die hier relevant ist, ist $d\vec{P}(t)/dt = \vec{F}^A$. Für den Fall der Rakete wurde ein Ausdruck für $d\vec{P}(t)/dt$ in der Vorlesung abgeleitet.

Aufgabe 4.3

Eine (idealisierte) Planetenbahn kann, bei geeigneter Wahl des Inertialsystems, in der Form

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos(\varphi(t)) - \epsilon \cdot a \\ b\sin(\varphi(t)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden. Dabei sind $a, b > 0$, mit $a \geq b$ und $\epsilon = \sqrt{a^2 - b^2}/a$. Die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ beschreibt — für jede beliebige (streng monotone) von der Zeit t abhängige Funktion $\varphi(t)$ — eine Ellipse in der x_1-x_2-Koordinatenebene, mit großer Halbachse a, kleiner Halbachse b, wobei einer der Brennpunkte im Koodinatenursprung ($\vec{x} = \vec{0}$) liegt. ϵ ist die numerische Exzentrizität der Ellipse.
Für eine Planetenbahn ist $\varphi(t)$ implizit gegeben durch

$$\varphi(t) - \epsilon\sin(\varphi(t)) = t\,.$$

(i) Drücken Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung der Bahnkurve $\vec{r}(t)$ durch $\varphi(t)$ (und die Konstanten a, b, ϵ) aus.

(ii) Die Masse des Planeten sei m. Zeigen Sie, dass der Drehimpuls der Bahnkurve konstant ist.

Wert jeder Aufgabe = 12 Punkte

Abgabe: Bis Montag, 10.11.2014, vor dem Übungsseminar