Übungen zu TP1-Mechanik (Staatsexamen Lehramt)
Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1.1

(a) Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie das Skalarprodukt $(\vec{x} \bullet \vec{y})$ und den Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$.

(b) Gegeben sind die 2×2 -Matrizen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$ und $\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$. Gilt $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$?

(c) Gegeben ist die Matrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestätigen Sie für diese Matrix die Gültigkeit der Gleichung

$$(\vec{x} \bullet \underline{\underline{A}}\vec{y}) = (\underline{\underline{A}}^T \vec{x} \bullet \vec{y}),$$

indem Sie beide Seiten für allgemeine Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ berechnen.

/...2

Aufgabe 1.2

Gegeben ist die Bahnkurve $\vec{r}: (t_0, t_1) \rightarrow \mathbb{R}^3$, wobei t ein Zeitparameter ist, mit

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_1 \cos(st) \\ r_2 \sin(st + s_0) \\ ht \end{pmatrix},$$

wobei $r_1 < r_2, s, s_0, h$ positive Konstanten sind.

- (a) Fertigen Sie — für geeignet gewählte Konstanten — eine Skizze der Bahnkurve an.
- (b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ und die Beschleunigung $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t)$.
- (c) Berechnen Sie

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}(t) \bullet \vec{v}(t)).$$

Aufgabe 1.3

Die Matrix $\underline{\underline{D}}(3, \theta)$ ist für $\theta \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$\underline{\underline{D}}(3, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Zeigen Sie, dass für alle Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$(\underline{\underline{D}}(3, \theta)\vec{x} \bullet \underline{\underline{D}}(3, \theta)\vec{y}) = (\vec{x} \bullet \vec{y}).$$

- (b) Berechnen Sie $\underline{\underline{D}}(3, \theta)\vec{x}$ für die Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{bzw.} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und benutzen Sie die Ergebnisse, um anhand einer Skizze (für geeignete Wahl von θ) darzustellen, dass die Matrix $\underline{\underline{D}}(3, \theta)$ einer Drehung um die $\vec{e}_3$ -Achse um den Winkel θ entspricht.

Wert jeder Aufgabe: 12 Punkte.

Abgabe: Bis Montag, 20.10.2014, vor Beginn des Übungsseminars.