Prof. Dr. R. Verch

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

TP1-L Wintersemester 2014/15

Miniscript:
Mathematische Begriffe und Sachverhalte (TP1-L)

1.) Der Vektorraum $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3$ ist der Raum aller 3-dimensionalen Spaltenvektoren mit reellen Einträgen,

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_j \in \mathbb{R}\,,\ j = 1,2,3 \right\}$$

Vektorsumme:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \,, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \,,$$

dann:

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \,.$$

Multiplikation mit Zahlen:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \,, \quad a \in \mathbb{R}\,,$$

dann:

$$a\vec{x} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ ax_3 \end{pmatrix} \,.$$

Für alle $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
a(\vec{x}+\vec{y}) &= a\vec{x} + a\vec{y} \\
\vec{x} + (\vec{y}+\vec{z}) &= (\vec{x}+\vec{y}) + \vec{z} \\
\vec{x}+\vec{y} &= \vec{y}+\vec{x} \\
\vec{0} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \vec{0}+\vec{x} = \vec{x}+\vec{0} = \vec{x} \\
-\vec{x} = (-1)\vec{x} &= \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \vec{x}-\vec{x} = \vec{x}+(-1)\vec{x} = \vec{0}
\end{aligned}
$$

Damit erfüllt $\mathbb{R}^3$ die Axiome eines 3-dimensionalen, reellen Vektorraums.

Bemerkung: Das verallgemeinert unmittelbar von $\mathbb{R}^3$ auf den Fall von $\mathbb{R}^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, d.h. den Raum der n-dimensionalen Spaltenvektoren mit reellen Einträgen. Entsprechend verallgemeinert alles, was im Folgenden für den $\mathbb{R}^3$ dargestellt wird, auf den $\mathbb{R}^n$, sofern nichts anderes dazu vermerkt wird.

2.) Euklidisches Skalarprodukt und Norm

Für

$$
\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} , \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} ,
$$

ist das **Euklidische Skalarprodukt** definiert durch

$$
(\vec{x} \bullet \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = \sum_{j=1}^{3} x_j y_j \, .
$$

Das Skalarprodukt hat die folgenden Eigenschaften für alle $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
(\vec{x} \bullet \vec{y}) &= (\vec{y} \bullet \vec{x}) \\
a(\vec{x} \bullet \vec{y}) &= (a\vec{x} \bullet \vec{y}) = (\vec{x} \bullet (a\vec{y})) \\
(\vec{x} \bullet (\vec{y}+\vec{z})) &= (\vec{x} \bullet \vec{y}) + (\vec{y} \bullet \vec{z}) \\
((\vec{x}+\vec{y}) \bullet \vec{z}) &= (\vec{x} \bullet \vec{z}) + (\vec{y} \bullet \vec{z}) \\
(\vec{x} \bullet \vec{x}) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{x} = \vec{0}
\end{aligned}
$$

Die **Euklidische Norm** (oder: geometrische Länge) von $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$||\vec{x}|| = \sqrt{(\vec{x} \bullet \vec{x})}\,.$$

Es gilt für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} ||a\vec{x}|| &= |a| \cdot ||\vec{x}|| \\ ||\vec{x} + \vec{y}|| &\leq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}|| \quad \text{(Dreiecksungleichung)} \\ ||\vec{x}|| = 0 &\quad \Longrightarrow \quad \vec{x} = \vec{0} \\ |(\vec{x} \bullet \vec{y})| &\leq ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}|| \quad \text{(Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)} \end{aligned}$$

Bei der Dreiecksungleichung und bei der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt Gleichheit dann und nur dann, wenn $\vec{y} = a\vec{x}$ oder $\vec{x} = a'\vec{y}$ mit $a, a' \in \mathbb{R}$ gilt. (Insbesondere, wenn $\vec{x} = \vec{0}$ oder $\vec{y} = \vec{0}$.)

Für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$|(\vec{x} \bullet \vec{y})| = \cos(\alpha(\vec{x}, \vec{y}))||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||$$

wobei $\alpha(\vec{x}, \vec{y})$ der spitzere Winkel ($\leq 90°$) zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ ist.

Wenn $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$, dann sind $\vec{x}$ und $\vec{y}$ genau dann zueinander **orthogonal** ($\vec{x} \perp \vec{y}$), wenn $(\vec{x} \bullet \vec{y}) = 0$:

$$(\vec{x} \bullet \vec{y}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} \perp \vec{y}\,.$$

3.) Orthonormalbasen

Ein Satz $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ von Vektoren im $\mathbb{R}^3$ heißt **Orthonormalbasis** (kurz: ONB), falls

$$(*) \qquad ||\vec{w}_j|| = 1 \quad (j = 1, 2, 3) \quad \text{und} \quad (\vec{w}_1 \bullet \vec{w}_2) = 0\,,\ (\vec{w}_2 \bullet \vec{w}_3) = 0\,,\ (\vec{w}_3 \bullet \vec{w}_1) = 0\,.$$

Die Bedingungen in $(*)$ sind äquivalent zu

$$(\vec{w}_j \bullet \vec{w}_k) = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, 2, 3)\,,$$

wobei δ_{jk} das **Kronecker-Delta Symbol** ist, definiert als

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad j = k \\ 0 & \text{falls} \quad j \neq k \end{cases}$$

Jeder Vektor $\vec{x}$ lässt sich in eindeutiger Weise als Linearkombination einer ONB schreiben: Für jedes $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{3} (\vec{w}_j \bullet \vec{x})\vec{w}_j\,.$$

Die **Standard-ONB** des $\mathbb{R}^3$ wird bezeichnet mit $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, definiert durch

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.) Lineare Abbildungen und Matrizen

Eine Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heißt **linear**, wenn für all $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$, $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$T(a\vec{x} + b\vec{y}) = aT(\vec{x}) + bT(\vec{y}) .$$

Bei linearen Abbildungen schreibt man oft $T\vec{x}$ anstelle von $T(\vec{x})$.

Eine reelle 3×3 **Matrix** ist eine quadratische Zahlenanordnung mit reellen Einträgen:

$$\underset{=}{A} = (A_{jk})_{j,k=1}^3 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Linker Index (j): **Zeilenindex** Rechter Index (k): **Spaltenindex**

Die Anwendung von *links* der Matrix $\underset{=}{A}$ auf $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ergibt ein $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$,

$$\vec{y} = \underset{=}{A}\vec{x} , \quad \text{definiert durch} \quad y_j = \sum_{k=1}^{3} A_{jk} x_k .$$

Aus der Definition folgt für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$, $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\underset{=}{A}(a\vec{x} + b\vec{y}) = a\underset{=}{A}\vec{x} + b\underset{=}{A}\vec{y} ,$$

d.h. die Multiplikation von Vektoren mit einer Matrix ist eine lineare Abbildung.

Jede lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ läßt sich durch die Matrix $\underset{=}{T} = (T_{jk})_{j,k=1}^3$ mit den Einträgen

$$T_{jk} = (\vec{e}_j \bullet T(\vec{e}_k))$$

darstellen:

$$T(\vec{x}) = \underset{=}{T}\vec{x} \quad \text{für alle} \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3 .$$

Mit dieser Beziehung zwischen linearen Abbildungen T und Matrizen $\underset{=}{T}$ entspricht die Hintereinanderausführung von linearen Abbildungen dem Matrixprodukt.

Für zwei 3×3 Matrizen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix},$$

ist das **Matrixprodukt** $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$ wieder eine 3×3-Matrix,

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}, \quad \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix},$$

definiert durch

$$C_{jk} = \sum_{i=1}^{3} A_{ji} B_{ik} .$$

Wenn $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zwei lineare Abbildungen sind und

$$\underline{\underline{T}} = ((\vec{e}_j \bullet T(\vec{e}_k)))_{j,k=1}^{3}, \quad \underline{\underline{L}} = ((\vec{e}_j \bullet L(\vec{e}_k)))_{j,k=1}^{3}$$

die zugehörigen Matrizen bezüglich der Standard-Basis von $\mathbb{R}^3$, dann gilt für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$

$$T(L(\vec{x})) = (\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{L}})\vec{x} = \underline{\underline{T}}(\underline{\underline{L}}\vec{x}) .$$

Achtung: Das Matrixprodukt ist **nicht kommutativ**, d.h. im allgemeinen (außer für spezielle Matrizen) gilt

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} \quad !$$

Ähnlich wie bei Vektoren $\vec{x}$ kann man auch für Matrizen Linearkombinationen durch die Linearkombinationen der jeweiligen Eintragskomponenten bilden, also für $a, b \in \mathbb{R}^3$ und Matrizen $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}$:

$$a\underline{\underline{A}} + b\underline{\underline{B}} = (aA_{jk} + bB_{jk})_{j,k=1}^{3} .$$

Mit dieser Definition gilt dann für alle $a, b \in \mathbb{R}$, Vektoren $\vec{x}$ und Matrizen $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}, \underline{\underline{C}}$:

$$\begin{aligned} (a\underline{\underline{A}} + b\underline{\underline{B}})\vec{x} &= a\underline{\underline{A}}\vec{x} + b\underline{\underline{B}}\vec{x} \\ (a\underline{\underline{A}} + b\underline{\underline{B}}) \cdot \underline{\underline{C}} &= a\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{C}} + b\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{C}} \\ \underline{\underline{C}} \cdot (a\underline{\underline{A}} + b\underline{\underline{B}}) &= a\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{A}} + b\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{B}} \end{aligned}$$

5.) Die transponierte Matrix

Für eine Matrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

ist die **transponierte Matrix** definiert durch

$$\underline{\underline{A}}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

d.h. $\underline{\underline{A}}^{\mathsf{T}}$ entsteht aus $\underline{\underline{A}}$ durch Vertauschen der Zeilen- und Spaltenindices. Das ist gleichbedeutend damit, die Matrixelemente, also die Einträge der Matrix, an der Matrixdiagonalen — die Diagonale von der linken oberen zur rechten unteren Ecke, auf der die **Matrixdiagonalelemente** A_{11}, A_{22}, A_{33} stehen — zu spiegeln.

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$, Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ und alle Matrizen $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}$ gilt:

$$\begin{aligned} (a\underline{\underline{A}} + b\underline{\underline{B}})^{\mathsf{T}} &= a\underline{\underline{A}}^{\mathsf{T}} + b\underline{\underline{B}}^{\mathsf{T}} \\ (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}})^{\mathsf{T}} &= \underline{\underline{B}}^{\mathsf{T}} \cdot \underline{\underline{A}}^{\mathsf{T}} \qquad \text{Beachte Vertauschung der Reihenfolge!} \\ (\underline{\underline{A}}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} &= \underline{\underline{A}} \\ (\vec{x} \bullet \underline{\underline{A}}\vec{y}) &= (\underline{\underline{A}}^{\mathsf{T}}\vec{x} \bullet \vec{y}) \end{aligned}$$

Man nennt Matrizen $\underline{\underline{A}}$, die $\underline{\underline{A}}^{\mathsf{T}} = \underline{\underline{A}}$ erfüllen, **symmetrisch**.

6.) Orthogonale Matrizen, Drehungen, Spiegelungen

Eine Matrix $\underline{\underline{D}}$ heißt **orthogonal**, wenn sie die Bedingung

$$\underline{\underline{D}}^{\mathsf{T}}\underline{\underline{D}} = \mathbf{1} = \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{D}}^{\mathsf{T}}$$

erfüllt. Dabei ist $\mathbf{1}$ die **Einheitsmatrix** (oder 1-Matrix),

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

es gilt $\mathbf{1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} \cdot \mathbf{1} = \underline{\underline{A}}$ für jede Matrix $\underline{\underline{A}}$.

Eine Matrix $\underline{\underline{D}}$ ist orthogonal genau dann, wenn für alle Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ gilt:

$$(D\vec{x} \bullet D\vec{y}) = (\vec{x} \bullet \vec{y}) \, .$$

D.h. eine orthogonale Matrix entspricht einer linearen Abbildung der Menge der Vektoren des $\mathbb{R}^3$, die **Längen von Vektoren** und **Winkel zwischen Vektoren unverändert läßt**. Dies enspricht dem Verhalten von (starren) Drehungen um eine Achse, oder von Spiegelungen.

Ein Beispiel ist die Matrix $\underline{\underline{D}}(3, \theta)$, die eine Drehung um die $\vec{e}_3$-Achse um den Winkel θ beschreibt:

$$\underline{\underline{D}}(3, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

7.) Bahnkurven

Für $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ mit $t_0 < t_1$ ist (t_0, t_1) ein offenes, reelles Intervall.

Eine Abbildung

$$\vec{r} : (t_0, t_1) \to \mathbb{R}^3 \, , \quad t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ r_3(t) \end{pmatrix}$$

heißt eine **Bahnkurve**. Dabei ist der Parameter t üblicherweise ein Zeitparameter.

Von Bahnkurven möchte man Ableitungen bilden, um Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Bahnkurve zu ermitteln. Dafür müssen die **Koordinatenfunktionen** $t \mapsto r_j(t)$ $(j = 1, 2, 3)$ der Bahnkurve genügend oft stetig differenzierbar sein. Wir nehmen an, dass die Koordinatenfunktionen immer wenigstens C^2 sind, also 2-mal stetig differenzierbar. Es lassen sich also für alle $t \in (t_0, t_1)$ die erste und die zweite Ableitung der r_j bilden, und diese Ableitungen sind auch stetige Funktionen.

In der Physik schreibt man für die Zeitableitung gerne einen Punkt über die entsprechende Größe (das geht auf Newton zurück). Also

$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \dot{r}_1(t) \\ \dot{r}_2(t) \\ \dot{r}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} r_1(t) \\ \frac{d}{dt} r_2(t) \\ \frac{d}{dt} r_3(t) \end{pmatrix}$$

Diese Definition der Zeitableitung einer Bahnkurve stimmt auch überein mit der der Ableitung einer vektorwertigen Funktion: Es gilt

$$\lim_{\Delta t \to 0} || \tfrac{1}{\Delta t} (\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)) - \dot{\vec{r}}(t) || = 0$$

für alle $t \in (t_0, t_1)$. Man definiert die erste Zeitableitung

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$$

als die **Geschwindigkeit** der Bahnkurve, und die zweite Zeitableitung

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \tfrac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t)$$

als die **Beschleunigung** der Bahnkurve. (Wobei zu beachten ist, dass dies sich auf die Beschreibung der Bahnkurve in gewählten Koordinaten, d.h. in der Standard-ONB des $\mathbb{R}^3$ bezieht.)