

Mathematische Methoden der klassischen Physik

Zusammenfassung Differentialgleichungen

In der Vorlesung wurden drei unterschiedliche Typen von Differentialgleichungen (DGL) besprochen, die jeweils unterschiedliche Lösungstechniken erfordern. Wir gehen hier noch einmal diese drei Typen durch. In allen Fällen bezeichnen wir die gesuchte Funktion als x , die Variable als t , und die Ableitungen als $\dot{x}(t) = dx/dt$, $\ddot{x}(t) = d^2x/dt^2$. Natürlich gilt alles hier Gesagte genauso, wenn andere Bezeichnungen gewählt werden – etwa y für die gesuchte Funktion, x für die Variable, mit Ableitung $y'(x) = dy/dx$ etc.

Die drei Gleichungstypen sind

$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + b x(t) = f(t),$	Schwingungsgleichung
$\dot{x}(t) = a(t) \cdot b(x(t)),$	separierte Differentialgleichung 1. Ordnung
$\dot{x}(t) = a(t) \cdot x(t) + f(t).$	Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

Es fallen gleich einige Unterschiede zwischen diesen Gleichungen auf: Bei der Schwingungsgleichung tritt neben der ersten Ableitung $\dot{x}$ auch die zweite Ableitung $\ddot{x}$ auf (man sagt, die Schwingungsgleichung ist 2. Ordnung), während in den anderen beiden Fällen nur erste Ableitungen auftreten. Die Schwingungsgleichung und die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung (also Fall I und Fall III) sind *linear*, d.h. es treten $x, \dot{x}, \ddot{x}$ nicht in Potenzen oder anderen nicht-linearen Funktionen auf. Im Unterschied dazu ist bei der separierten DGL wegen der recht beliebigen Funktion b auch ein nichtlineares Verhalten möglich – z.B. für $b(u) = u^{10}$ haben wir den Term $x(t)^{10}$. In der Schwingungsgleichung sind a, b Konstante, d.h. reelle Zahlen, die nicht von t abhängen, während in Fall II und III a und b *Funktionen* von t bezeichnen. In Fall I und III tritt weiterhin noch eine vorgegebene Funktion f auf, die *Inhomogenität* genannt wird.

Da diese Gleichungen so unterschiedlich sind, verwundert es nicht, dass man zum Lösen auch ganz unterschiedliche Verfahren verwendet. Es kommt also darauf an, zuerst zu erkennen, mit welchem Typ man es in einer konkreten Aufgabe zu tun hat, und dann das richtige Verfahren anzuwenden. Dazu gibt es weiter unten Beispiele.

In allen Fällen wird man daran interessiert sein, die *Lösungen* der betrachteten DGL zu bestimmen, also Funktionen $t \mapsto x(t)$, die die DGL erfüllen. Es gibt üblicherweise viele (unendlich viele) Lösungen, die Menge *aller* Lösungsfunktionen nennt man die *allgemeine Lösung* der DGL. Diese allgemeine Lösung enthält freie, unbestimmte Parameter – zwei Parameter $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ im Falle der Schwingungsgleichung, und einen Parameter $c \in \mathbb{R}$ in den anderen beiden Fällen. (Das liegt daran, dass die Schwingungsgleichung 2. Ordnung und die anderen 1. Ordnung sind.) Neben der allgemeinen Lösung interessieren in der Physik auch häufig spezielle Lösungen, die durch sogenannte *Anfangsbedingungen* festgelegt sind. Das bedeutet, dass man zusätzlich zu der DGL noch eine oder zwei weitere Identitäten fordert, nämlich im Fall der Schwingungsgleichung

$$x(t_0) = \xi_1, \quad \dot{x}(t_0) = \xi_2, \quad (0.1)$$

mit vorgegebenen Zahlen $t_0, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ (meist ist $t_0 = 0$), und in den anderen beiden Fällen

$$x(t_0) = x_0 \quad (0.2)$$

mit vorgegebenen Zahlen $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$. Fordert man (0.1) bzw. (0.2), so lassen sich die freien Parameter c_1, c_2 bzw. c eindeutig bestimmen, so dass man nur eine einzige Lösung der DGL mit zusätzlicher Anfangsbedingung hat.

Bevor wir uns den Lösungsmethoden zuwenden, noch zwei Bemerkungen: Erstens sind die drei hier aufgelisteten Typen von Differentialgleichungen längst nicht alle möglichen, sondern vielmehr drei häufig auftretende, aber sehr spezielle DGLen. Wenn man also auf eine DGL stößt, kann es leicht sein, dass sie zu keiner der obigen Klassen gehört, und deshalb mit den Methoden *dieser* Vorlesung auch nicht zu lösen ist. Zweitens ist zu bemerken, dass es zwar relativ kompliziert sein kann, eine (spezielle oder allgemeine) Lösung einer DGL zu berechnen, aber eine *Probe*, ob man tatsächlich eine Lösung gefunden hat, denkbar einfach ist: Man nimmt einfach die vermeintliche Lösungsfunktion $t \mapsto x(t)$ her, setzt sie in die DGL ein (d.h. berechnet die Ableitungen etc) und prüft, ob die fragliche DGL erfüllt ist oder nicht. So eine Probe empfiehlt sich eigentlich immer.

Jetzt zu den Lösungsmethoden für die drei unterschiedlichen Typen.

1) Die Schwingungsgleichung

Dies ist wie gesagt die DGL

$$\ddot{x}(t) + a \dot{x}(t) + b x(t) = f(t), \quad (0.3)$$

wobei a, b Konstanten sind (also Zahlen, die nicht von t abhängen), und f eine vorgegebene Funktion von t ist. Man unterscheidet hier die beiden Fälle $f(t) = 0$ (das ist die *homogene* Schwingungsgleichung) und $f(t) \neq 0$ (die *inhomogene* Schwingungsgleichung).

Im homogenen Fall (d.h. $f(t) = 0$) kann man sich Lösungen per *Exponentialansatz* verschaffen. Das heißt, man setzt $x(t) := e^{\lambda t}$ und bestimmt λ so, dass die Gleichung $\ddot{x}(t) + a \dot{x}(t) + b x(t) = 0$ gilt. Dies führt auf eine quadratische Gleichung für λ , nämlich $\lambda^2 + a \lambda + b = 0$, die eine oder zwei Lösungen hat. Im allgemeinen sind diese Lösungen komplexe Zahlen. Bildet man dann Real- und Imaginärteil von $e^{\lambda t}$, d.h. $\operatorname{Re}(e^{\lambda t}) = e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} \cdot \cos(\operatorname{Im}(\lambda)t)$ und $\operatorname{Im}(e^{\lambda t}) = e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} \cdot \sin(\operatorname{Im}(\lambda)t)$, so erhält man reelle Lösungen der homogenen Schwingungsgleichung. Für den Fall, dass $\lambda^2 + a \lambda + b = 0$ nur eine Lösung hat (aperiodischer Grenzfall), kann man sich eine zweite Lösung durch einen anderen Ansatz verschaffen (siehe Aufgabe 34).

Im Zusammenhang mit der Schwingungsgleichung spielt der Begriff des *Fundamentalsystems* eine wichtige Rolle. Man sieht nämlich, dass, wenn x_1 und x_2 zwei Lösungen der homogenen Schwingungsgleichung sind, dann auch alle Linearkombinationen, d.h. alle Funktionen von dem Typ $t \mapsto c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ ebenfalls Lösungen der homogenen Schwingungsgleichung sind, für beliebige Parameter $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Zwei Lösungen x_1, x_2 bilden per Definition genau dann ein Fundamentalsystem, wenn *jede* Lösung der homogenen Schwingungsgleichung eine Linearkombination von x_1 und x_2 ist. Ob zwei Lösungen ein Fundamentalsystem bilden, prüft man praktisch dadurch nach, dass man nachrechnet, ob die *Wronski-Determinante* (siehe Aufgabe 33) ungleich Null ist.

Durch eine Anfangsbedingung (0.1) können dann die beiden freien Parameter c_1, c_2 in der allgemeinen Lösung der Schwingungsgleichung berechnet werden.

Als nächstes betrachten wir den *inhomogenen* Fall ($f(t) \neq 0$). Hier gilt es zunächst, überhaupt

irgend eine Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden. Für allgemeines f wurde das in der Vorlesung nicht behandelt, sondern nur für *harmonische Inhomogenität*, d.h. $f(t) = \cos(\omega_0 t)$ oder $f(t) = \sin(\omega_0 t)$, mit vorgegebenem $\omega_0 > 0$. Für diese Fälle hilft wieder ein Exponentialansatz weiter: Man geht zuerst zu einer komplexen Gleichung über, indem man $f(t)$ durch $e^{i\omega_0 t}$ ersetzt, und macht dann den Ansatz $x(t) := k e^{i\omega_0 t}$ mit einem zu bestimmenden k . Einsetzen führt auf eine Bedingungsgleichung für k , die man meist lösen kann (z.B. falls $a \neq 0$, nur im Resonanzfall kann man die Gleichung nicht lösen, und braucht einen anderen Ansatz, siehe Aufgabe 35). Hat man k bestimmt (das wird üblicherweise eine komplexe Zahl sein), so erhält man eine reelle Lösung, indem man entweder den Realteil von $k e^{i\omega_0 t}$ bildet (für $f(t) = \cos(\omega_0 t)$) oder den Imaginärteil (für $f(t) = \sin(\omega_0 t)$). Nennen wir diese so gefundene (“spezielle”) Lösung der inhomogenen Gleichung x_{in} , dann ist die *allgemeine* Lösung der inhomogenen Gleichung

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + x_{\text{in}}(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

wobei x_1, x_2 ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung ist.

2) Trennung der Variablen

Eine separierte Differentialgleichung 1. Ordnung sieht so aus:

$$\dot{x}(t) = a(t) \cdot b(x(t)), \quad (0.4)$$

hierbei sind a, b vorgegebene *Funktionen*, also nicht wie bei der Schwingungsgleichung Konstanten. Im Gegensatz zur Schwingungsgleichung ist diese DGL im allgemeinen nicht linear; ein Exponentialansatz führt deshalb hier *nicht* zum Erfolg. Das richtige Verfahren für diesen Fall heißt “Trennung der Variablen”, man merkt es sich am besten schematisch so: In Schritt 1 der Lösung “trennt man die Variablen”, gemeint sind damit x und t d.h. man formt die DGL so um, dass links nur x ’s und rechts nur t ’s stehen. Dabei notiert man $\dot{x} = dx/dt$, erhält also formal

$$\frac{dx}{b(x)} = a(t) dt.$$

Beide Seiten dieser “Gleichung” machen nicht viel Sinn, es handelt sich nur um eine Merkregel. Für einen sinnvollen Ausdruck werden wir beide Seiten integrieren – links über x , rechts über t ,

$$\int \frac{dx}{b(x)} = \int a(t) dt + c. \quad (0.5)$$

Diese Integrale sind erstmal als unbestimmte Integrale, dh Stammfunktionen, aufzufassen, wobei wir auf der rechten Seite eine beliebige Konstante $c \in \mathbb{R}$ addiert haben, da Stammfunktionen nur bis auf Addition einer Konstanten festgelegt sind. Schritt 2 der Lösung besteht jetzt darin, beide Integrale auszurechnen. Dann erhält man links eine Funktion von x , rechts eine Funktion von t – welche Funktionen das sind, hängt natürlich von a und b ab. Im Schritt 3 des Verfahrens löst man diese Gleichung nach x auf, und hat damit die Formel für die Lösung $t \mapsto x(t)$ erhalten. Es ist klar, dass diese Formel immer noch von der unbestimmten Konstante c abhängen wird.

Fordern wir jetzt zusätzlich die Anfangsbedingung (0.2), so lässt sich c eindeutig berechnen.

Es sei noch bemerkt, dass man die Anfangsbedingung auch gleich von Anfang an mit in das Lösungsschema einbauen kann. Hat man nämlich die Forderung $x(t_0) = x_0$, so formuliert man die *bestimmten* Integrale

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{b(x')} = \int_{t_0}^t a(t') dt'.$$

Hier wurden als Integrationsvariable x', t' verwendet, um sie von den Integrationsgrenzen zu unterscheiden.

Berechnen der Integrale und Auflösen nach $x(t)$ führt dann automatisch auf die Lösung, die auch $x(t_0) = x_0$ erfüllt.

In dieser Form lässt sich auch erkennen, dass das Lösungsschema eine Anwendung der Substitutionsregel für Integrale ist – es stellt eine gute Übung dar, die Formel mit den bestimmten Integralen mal wirklich aus der DGL herzuleiten (ohne formales Hantieren mit dx und dt).

3) Variation der Konstanten

Eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung sieht so aus:

$$\dot{x}(t) = a(t) \cdot x(t) + f(t), \quad (0.6)$$

hierbei sind a und f vorgegebene *Funktionen*. Im Vergleich zur separierten DGL fällt auf: Die Funktion b fehlt, aber dafür haben wir jetzt einen Extraterm $f(t)$ – die Inhomogenität. Wie bei der Schwingungsgleichung ist es für die Lösung dieser DGL wichtig, sich zuerst den homogenen Fall anzugucken, in dem man (vorerst) $f(t) = 0$ setzt. Dann hat man als DGL $\dot{x}(t) = a(t) \cdot x(t)$ vorliegen. Das ist offenbar eine DGL von Typ II, und sogar eine besonders einfache! Wir können also (0.5) verwenden, und die x -Integration ausführen:

$$\int a(t) dt + c' = \int \frac{dx}{x} = \log |x|.$$

Wir haben die Konstante hier c' genannt, aber das ist ja eine reine Bezeichnungssache. Auflösen nach x (was wir dann wieder $x(t)$ nennen) ergibt

$$|x(t)| = \exp \left(\int a(t) dt + c \right) = e^{c'} \cdot e^{\int a(t) dt}.$$

Löst man noch den Betrag $|x(t)| = \pm x(t)$ auf und setzt $c := \pm e^{c'}$, so erhalten wir die Formel

$$x(t) = c \cdot e^{\int a(t) dt}, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (0.7)$$

Dies ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung, welche wie gesagt nur ein Spezialfall von Typ II ist.

Nun stehen wir aber vor dem Problem, dass uns eigentlich die *inhomogene* Gleichung interessiert, also $f(t) \neq 0$. Um dafür eine Lösung zu bekommen, gibt es einen Ansatz (“Variation der Konstanten”), der immer zum Erfolg führt. Man setzt (wieder mit der Bezeichnung x_{in} für die Lösung der inhomogenen Gleichung)

$$x_{\text{in}}(t) := c(t) \cdot e^{\int a(t) dt}.$$

Hier ist jetzt c keine Konstante mehr, sondern eine Funktion von t , die es zu bestimmen gilt. Praktisch nimmt man jetzt den Ansatz her, setzt ihn in die inhomogene DGL $\dot{x} = a(t)x + f(t)$ ein, und erhält daraus eine Gleichung für (die Ableitung von) c , aus der man c bestimmen kann. Dies liefert eine Lösung der inhomogenen Gleichung, und die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ergibt sich nun ganz analog wie bei der Schwingungsgleichung als

$$x(t) = c \cdot e^{\int a(t) dt} + x_{\text{in}}(t), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Wiederum lässt sich die *Konstante* c (nicht die Funktion c , die wir an dieser Stelle ja schon bestimmt haben) durch eine Anfangsbedingung der Form (0.2) festlegen.

Beispiel 1: Wir betrachten die Differentialgleichung $\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 8x(t) = 0$, die wir als vom Typ (0.3) (Schwingungsgleichung) erkennen (mit $a = 4$, $b = 8$, $f(t) = 0$, also homogen). Hätten wir etwa $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t)^2 + x(t) = 0$ oder $\ddot{x}(t) + t\dot{x}(t) + 8x(t) = 0$ vorliegen, könnten wir mit dem Stoff dieser Vorlesung erstmal nichts zur Lösung sagen, weil diese Gleichungen nicht vom Typ (0.3) sind (und auch von keinem der anderen Typen). Aber zurück zu $\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 8x(t) = 0$. Wir machen den Exponentialansatz $x(t) = e^{\lambda t}$, setzen ein, leiten ab, teilen durch $e^{\lambda t}$, und erhalten so die Bedingung

$$\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0.$$

Auflösen nach λ ergibt zwei Lösungen, $\lambda_{\pm} = -2 \pm 2i$, d.h. wir haben die komplexen Lösungen

$$z_{\pm}(t) := e^{(-2 \pm 2i)t} = e^{-2t}(\cos(2t) \pm i \sin(2t)).$$

Natürlich wollen wir reelle Lösungen haben, und bilden deshalb Real- und Imaginärteil. Das ergibt

$$\operatorname{Re}(z_{\pm})(t) = e^{-2t} \cos(2t) \quad \operatorname{Im}(z_{\pm})(t) = \pm e^{-2t} \sin(2t).$$

Das sind in diesem Fall also drei Lösungen, wobei sich die aus dem Imaginärteil gewonnenen Lösungen nur um ein Vorzeichen unterscheiden, also sicher kein Fundamentalsystem bilden. Wenn wir aber $x_1(t) := e^{-2t} \cos(2t)$ und $x_2(t) := e^{-2t} \sin(2t)$ wählen, kann man leicht nachprüfen, dass ein Fundamentalsystem vorliegt (Die Wronski-Determinante ist in diesem Fall $2e^{-4t} \neq 0$.) Damit wissen wir, dass die allgemeine Lösung von $\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 8x(t) = 0$ ist:

$$x(t) = c_1 e^{-2t} \cos(2t) + c_2 e^{-2t} \sin(2t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (0.8)$$

Um c_1, c_2 festzulegen, stellen wir jetzt zusätzlich noch die Anfangsbedingung $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$. Dann ergibt sich $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{1}{2}$, also die spezielle Lösung

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{-2t} \sin(2t).$$

Beispiel 2: Wir betrachten die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = t^9 \cdot \sqrt{x(t)}$, die wir als vom separierten Typ erkennen (“Ableitung von x = (Funktion von t) mal (Funktion von x)”), mit $a(t) = t^9$ und $b(u) = \sqrt{u}$. Wir trennen die Variablen (man könnte sich auch die Lösungsformel (0.5) merken, aber “Trennung der Variablen” sagt eigentlich alles und schont das Gedächtnis), also formal

$$\frac{dx}{dt} = t^9 \cdot \sqrt{x} \quad \implies \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int dt t^9 + c.$$

Jetzt beide Integrale ausrechnen:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int dx x^{-1/2} = 2x^{1/2} = 2\sqrt{x},$$

und

$$\int dt t^9 + c = \frac{t^{10}}{10} + c.$$

Gleichsetzen, auflösen:

$$2\sqrt{x} = \frac{t^{10}}{10} + c \implies x(t) = \left(\frac{t^{10}}{20} + \frac{c}{2} \right)^2.$$

Fordern wir jetzt mal noch die Anfangsbedingung $x(0) = 1$, so erhalten wir konkret $c = 2$.

Beispiel 3: Wir betrachten die DGL $\dot{x}(t) = \frac{3x(t)}{t} + x(t) + t^4$ (für $t > 0$), die wir als vom Typ III erkennen ("Ableitung von x = (Funktion von t) mal x + Funktion von t "), mit $a(t) = \frac{3}{t} + 1$ und $f(t) = t^4$. Nach dem entsprechenden Schema nehmen wir uns also erstmal die homogene Gleichung $\dot{x}(t) = (\frac{3}{t} + 1) \cdot x(t)$ vor, trennen die Variablen, und integrieren:

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{3}{t} + 1 \right) \cdot x \implies \int \frac{dx}{x} = \int dt \left(\frac{3}{t} + 1 \right) + c'.$$

Das x -Integral gibt den Logarithmus (wie immer bei Variation der Konstanten), und für das t -Integral erhalten wir

$$\int dt \left(\frac{3}{t} + 1 \right) = 3 \log t + t.$$

Gleichsetzen (mit Konstante c') und Auflösen nach x ergibt wie in (0.7)

$$x_{\text{hom}}(t) = c e^{3 \log t + t} = c t^3 e^t.$$

Das ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung. Jetzt Ansatz für Variation der Konstanten:

$$x_{\text{in}}(t) := c(t) t^3 e^t,$$

einsetzen in $\dot{x}(t) = \frac{3x(t)}{t} + x(t) + t^4$ liefert für die linke Seite der Gleichung

$$\dot{x}_{\text{in}}(t) = c(t) (3t^2 e^t + t^3 e^t) + \dot{c}(t) t^3 e^t,$$

und für die rechte Seite

$$\frac{3x(t)}{t} + x(t) + t^4 = \frac{3c(t) t^3 e^t}{t} + c(t) t^3 e^t + t^4.$$

Gleichsetzen beider Seiten liefert nach Auflösung

$$\dot{c}(t) = t e^{-t},$$

also (mit partieller Integration)

$$c(t) = \int dt t e^{-t} = -t e^{-t} + \int dt e^{-t} = -(t+1)e^{-t}.$$

Damit haben wir als eine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$x_{\text{in}}(t) = -(t+1)e^{-t} \cdot t^3 e^t = -t^3(t+1).$$

(Die Probe zeigt, dass es stimmt). Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist also

$$x(t) = c t^3 e^t - t^3(t+1).$$

Wählen wir etwa als Anfangsbedingung $x(1) = 1$, so erhalten wir $c = 2/e$.

Schlussbemerkung: Man sieht, dass in diesem Fall nicht beliebige Anfangsbedingungen erfüllt werden können, z.B. ist immer (für alle c) $x(0) = 0$. Das liegt daran, dass die Funktion $a(t) = \frac{3}{t} + 1$ bei 0 unstetig ist; wir gehen auf diesen Punkt hier nicht näher ein.