8.C Nuclear Physics 9 (1958/59) 588—595; ©North-Holland Publishing Co., Amsterdam

SCHEMA EINER QUANTENMECHANIK MIT INDEFINITER METRIK

A. UHLMANN
Theoretisch-Physikalisches Institut der Universität Jena

Eingegangen am 27. Oktober 1958

Abstract: The problem is examined how to change the axioms of quantum theory in order to introduce an indefinite metric. There are several inequivalent ways to divide the total Hilbert space of indefinite metric into two parts, one of which is of positive definite, the other of negative definite metric (so-called "physical" and "ghost-states").

In view of the arbitrariness in the choice of such decompositions the question is raised whether the completeness of the quantal description only requires the knowledge of the state-vectors and the hermitian operators belonging to the observables, or whether it is necessary to have further knowledge in order to privilege one mode of decomposition of the space into a positive and a negative part.

In the paper, the second suggestion is denied. Every commuting system of hermitian operators points to a definite decomposition in a *natural* way, provided it is "large enough". We call "decomposing" every system of commuting operators which divides (in a certain sense) the total Hilbert space into a positive and a negative part. Not only does a decomcomposing system induce the decomposition, but there is associated with it a new positive definite metric of the *total* space. In this way a probabilistic interpretation is valid and the usual axiomatics is applicable. With respect to decomposing systems which induce the same decomposition, all results belonging to a quantum theory with positive definite metric are conserved.

But there exists another case: the hermitian operator A may belong simultaneously to two decomposing systems $\mathfrak{S}_1$ and $\mathfrak{S}_2$ and the decomposition relative to $\mathfrak{S}_1$ may not agree with the decomposition relative to $\mathfrak{S}_2$. Then, when analysing a quantum state with the help of observables represented by operators belonging to $\mathfrak{S}_1$, we may find an expectation value $\bar{A}^{(1)}$ *different* from the expectation value $\bar{A}^{(2)}$ of A with respect to an experiment that determines (in principle) the $\mathfrak{S}_2$-observables.

1. Einführung

Die folgenden Ausführungen wurden durch eine Arbeit von Ascoli und Minardi [2]) angeregt. In dieser Arbeit wird behauptet, daß sich jede Quantentheorie mit indefiniter Metrik auf eine solche mit positiv-definiter Metrik zurückführen lasse, so daß die Einführung einer nicht-definiten Metrik zwar ein unter Umständen eleganter und nützlicher, das Wesen der Sache aber nicht verändernder Kunstgriff ist.

Es soll jedoch das Schema einer Quantentheorie skizziert werden, das sich beim Vorliegen indefiniter Metrik etwas vom Dirac-schen Schema [4]) unterscheidet, wodurch ein qualitativ neuer Zug auftritt: Ist A eine Observable, dann *kann* (aber muß nicht!) der Fall eintreten, daß der Erwartungswert $\bar{A}$ von A nicht bestimmt ist, wenn lediglich der Zustandsvektor ψ gegeben ist. Es kommt vielmehr beim Vorliegen indefiniter Metrik vor, daß $\bar{A}$ erst dann bestimmt ist, wenn Näheres über die Art und Weise bekannt ist, wie dieser Erwartungswert experimentell bestimmt wird. Werde z.B. $\bar{A}$ durch Experimente bestimmt, bei denen gleichzeitig mit A die Observablen $A_1, \ldots, A_r$ meßbar sind. Dann ist durch das Vorgeben des Zustandsvektors ψ und durch die Angabe, daß mit A auch gleichzeitig $A_1, \ldots, A_r$ meßbar sind, der Erwartungswert $\bar{A}$ von A eindeutig bestimmt. Der Erwartungswert von A bezüglich der Messung von A gleichzeitig mit einem anderen System $A'_1, \ldots, A'_s$ (das untereinander und mit A kommutiert), braucht nicht mit $\bar{A}$ übereinzustimmen.

Die Dirac-sche „bra-ket-Schreibweise" findet in der vorliegenden Arbeit keine Anwendung, da wir mit mehreren Metriken gleichzeitig rechnen müssen. Es werden die Zustandsvektoren (für einen gegebenen Zeitpunkt) mit $\psi, \psi_1, \ldots$ usw. bezeichnet. Die Zustandsvektoren bilden einen linearen komplexen Raum, auf dem Metriken (Skalarprodukte, Bilinearformen) $\langle\psi_1, \psi_2\rangle$, $\langle\psi_1, \psi_2\rangle_r$ usw. erklärt sind bzw. werden. Zu jeder solchen Metrik gehört eine bestimmte Norm $\langle\psi, \psi\rangle$, $\langle\psi, \psi\rangle_r$ usw. Die Begriffe „unitär" und „Hermitesch" sind nicht absolut, sondern bezüglich einer bestimmten Metrik gegeben.

2. Der Raum der Zustandsvektoren

Es sei $\mathfrak{Z}$ ein komplexer Hilbert-Raum mit einer indefiniten Metrik

$$\langle\psi_1, \psi_2\rangle; \qquad \psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{Z}.$$

Von seinen Vektoren nehmen wir an, daß sie die möglichen Zustände einer quantentheoretischen Gegebenheit beschreiben. Von der gegebenen Metrik wollen wir nur annehmen, daß sie nicht entartet ist, d.h. ist $\psi \in \mathfrak{Z}$ ein beliebiger Vektor, so existiert mindestens ein zweiter Vektor $\psi' \in \mathfrak{Z}$ mit $\langle\psi, \psi'\rangle \neq 0$. (Ist die Metrik entartet, so gibt es eine eindeutige Zerlegung von $\mathfrak{Z}$ in zwei zueinander orthogonale Teilräume, von denen der eine eine nicht-ausgeartete Metrik trägt, während auf dem anderen die Metrik identisch verschwindet. Wir beschränken uns dann auf den ersteren, den zweiten lassen wir weg.) Aus der Formel

$$\langle\lambda\psi_1+\psi_2, \lambda\psi_1+\psi_2\rangle = |\lambda|^2\langle\psi_1, \psi_1\rangle+\langle\psi_2, \psi_2\rangle+\lambda\langle\psi_1, \psi_2\rangle+\lambda^*\langle\psi_2, \psi_1\rangle \quad (1)$$

folgt, daß es Vektoren in $\mathfrak{Z}$ gibt, deren Norm von Null verschieden ist; denn sonst wäre die Metrik identisch Null.

Vor dem Aufbau eines quantentheoretischen Schemas müssen wir noch das Orthonormierungsverfahren für einen Hilbert-Raum mit indefiniter, nicht ausgearteter Metrik besprechen.

3. Das Orthonormierungsverfahren

Eine Menge Ω von Vektoren aus $\mathfrak{Z}$ wollen wir ein *Orthonormalsystem* nennen, wenn gilt:

$$\begin{aligned} \langle\psi, \psi\rangle &= \pm 1 \quad \text{für alle} \quad \psi \in \Omega, \\ \langle\psi_1, \psi_2\rangle &= 0 \quad \text{für alle} \quad \psi_1, \psi_2 \in \Omega \quad \text{mit} \quad \psi_1 \neq \psi_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Jede orthonormale Menge zerfällt in zwei getrennte Teile Ω_+ und Ω_-: Gerade dann gehört ein Vektor ψ aus Ω zu Ω_+, wenn die Norm von ψ positiv ist. Analoges gilt für die Bestimmung von Ω_-.

Wir bezeichnen ferner mit

$$(\Omega) \quad \text{bzw.} \quad (\Omega_+) \quad \text{bzw.} \quad (\Omega_-)$$

die Gesamtheit der Vektoren

$$\sum \alpha_k \psi_k, \qquad \sum |\alpha_k|^2 < \infty$$

mit

$$\psi_k \in \Omega \quad \text{bzw.} \quad \psi_k \in \Omega_+ \quad \text{bzw.} \quad \psi_k \in \Omega_-.$$

Da die Metrik auf (Ω_+) und (Ω_-) definit ist, sind $(\Omega_\pm)$ eigentliche Hilbert-Räume. (Einen Hilbert-Raum mit definiter Metrik bezeichnen wir als „eigentlich".) Es ist klar, daß $\langle\psi_+, \psi_-\rangle = 0$ für beliebige $\psi_+ \in (\Omega_+)$, $\psi_- \in (\Omega_-)$ ist.

Wir fügen nun zu den Eigenschaften von $\mathfrak{Z}$ ergänzend hinzu: Ist Ω ein Orthonormalsystem, so sind alle Vektoren aus (Ω) in $\mathfrak{Z}$ enthalten (Vollständigkeit von $\mathfrak{Z}$).

Hilfssatz: Ist Ω ein Orthonormalsystem und $\psi \in \mathfrak{Z}$, so gibt es ein weiteres Orthonormalsystem Ω' mit

$$\psi \in (\Omega') \quad \text{und} \quad \Omega \subset \Omega'.$$

Beweis: Es sind

$$\langle\psi, \psi_+\rangle, \quad \psi_+ \in (\Omega_+); \qquad \langle\psi, \psi_-\rangle, \quad \psi_- \in (\Omega_-)$$

zwei stetige Linearformen auf dem eigentlichen Hilbert-Räumen $(\Omega_\pm)$. Es gibt folglich Vektoren $\psi_1 \in (\Omega_+)$, $\psi_2 \in (\Omega_-)$ mit

$$\begin{aligned} \langle\psi, \psi_+\rangle &= \langle\psi_1, \psi_+\rangle \quad \text{für alle} \quad \psi_+ \in (\Omega_+), \\ \langle\psi, \psi_-\rangle &= \langle\psi_2, \psi_-\rangle \quad \text{für alle} \quad \psi_- \in (\Omega_-). \end{aligned}$$

Wir bilden $\psi_3 = \psi - \psi_1 - \psi_2$ und finden, daß

$$\begin{aligned} \langle\psi_3, \psi_+\rangle &= 0 \quad \text{für alle} \quad \psi_+ \in (\Omega_+), \\ \langle\psi_3, \psi_-\rangle &= 0 \quad \text{für alle} \quad \psi_- \in (\Omega_-) \end{aligned}$$

ist. Es ist folglich ψ_3 orthogonal zu (Ω) und deshalb erst recht zu Ω. Ist nun

$\langle\psi_3, \psi_3\rangle \neq 0$, so steht der Normierung nichts mehr im Wege und Ω' besteht aus Ω und dem Element

$$\frac{\sqrt{|\langle\psi_3, \psi_3\rangle|}}{\langle\psi_3, \psi_3\rangle}\psi_3.$$

Besondere Überlegungen erfordert der Fall $\langle\psi_3, \psi_3\rangle = 0$. Es gibt dann einen Vektor ψ_4 in $\mathfrak{Z}$ mit $\langle\psi_3, \psi_4\rangle \neq 0$; denn gemäß unserer Voraussetzung ist die Metrik nicht entartet. Nach Obigem existiert für diesen Vektor eine Zerlegung $\psi_4 = \psi'_4 + \psi_5$ mit $\psi_5 \in (\Omega)$ und mit zu (Ω) orthogonalem ψ_5. Da $\langle\psi_3, \psi_5\rangle = 0$ ist — denn ψ_3 ist Orthogonal zu (Ω) — ist $\langle\psi_3, \psi'_4\rangle \neq 0$. Wir können also gleich annehmen, daß ψ_4 zusätzlich noch orthogonal zu (Ω) ist. Wir wählen nun ein λ so, daß

$$|\lambda|^2\langle\psi_4, \psi_4\rangle + \lambda\langle\psi_4, \psi_3\rangle + \lambda^*\langle\psi_3, \psi_4\rangle \neq 0$$
$$|\lambda|^2\langle\psi_4, \psi_4\rangle - \lambda\langle\psi_4, \psi_3\rangle - \lambda^*\langle\psi_3, \psi_4\rangle \neq 0$$
$$|\lambda|^2\langle\psi_4, \psi_4\rangle + \lambda\langle\psi_4, \psi_3\rangle - \lambda^*\langle\psi_3, \psi_4\rangle = 0$$

ist, was wegen $\langle\psi_3, \psi_4\rangle \neq 0$ geht. Ein Blick auf Formel (1) lehrt, daß mit dem so bestimmten λ wegen $\langle\psi_3, \psi_3\rangle = 0$

$$\langle\psi_3+\lambda\psi_4, \psi_3+\lambda\psi_4\rangle \neq 0, \qquad \langle\psi_3-\lambda\psi_4, \psi_3-\lambda\psi_4\rangle \neq 0, \qquad \langle\psi_3+\lambda\psi_4, \psi_3-\lambda\psi_4\rangle = 0 \tag{x}$$

ist. Da ψ_3 und ψ_4 orthogonal zu (Ω) ist, sind es auch die Elemente

$$\psi_6 = \psi_3+\lambda\psi_4, \qquad \psi_7 = \psi_3-\lambda\psi_4$$

und wegen (x) sind sie auch untereinander orthogonal. Da sie schließlich beide nicht-verschwindende Norm besitzen, können wir sie auf ± 1 normieren. Sie bilden dann zusammen mit Ω das gesuchte Orthonormalsystem Ω'; denn

$$\psi = \tfrac{1}{2}\psi_7 + \tfrac{1}{2}\psi_6 + \psi_1 + \psi_2.$$

Damit haben wir das für die üblichen Schlüsse Wesentliche [1]) geleistet und können als gesichert ansehen:

Satz 1: Ist Ω^0 irgendein Orthonormalsystem von $\mathfrak{Z}$, so gibt es ein Orthonormalsystem Ω von $\mathfrak{Z}$ mit

a) $(\Omega) = \mathfrak{Z}$ und
b) $\Omega^0 \subset \Omega$.

Ein Orthonormalsystem mit der Eigenschaft a) heißt vollständig.

Wir können nun leicht die Zerlegungen von $\mathfrak{Z}$ in Teile mit positiver und negativer Norm (sog. „physikalische" und „Geisterzustände") beschreiben.

4. Zerlegung von $\mathfrak{Z}$ in zwei eigentliche Hilbert-Räume

Ist Ω ein vollständiges Orthonormalsystem, so ist

$$\mathfrak{Z} = (\Omega_+) + (\Omega_-) \tag{3}$$

eine Zerlegung von $\mathfrak{Z}$ in eine direkte Summe und die Metrik ist auf (Ω_+) positiv und auf (Ω_-) negativ definit. Mit anderen Worten, $(\Omega_\pm)$ sind eigentliche Hilbert-Räume mit positiver bzw. negativer Metrik.

Man ist nun bestrebt, die physikalischen Zustände durch Vektoren aus (Ω_+) darzustellen und den Vektoren aus (Ω_-) keine (zumindest keine unmittelbare) physikalische Bedeutung beizumessen[2,3]. Hieraus schließen Ascoli und Minardi[2]), daß man jede physikalische Theorie auch in (Ω_+) allein — wenn auch eventuell unbequemer — formulieren könne. Diese Verfasser haben dabei offenbar übersehen, daß die Zerlegung (3) nicht eindeutig ist. In der Tat, ist Ω' ein beliebiges anderes Orthonormalsystem, so ist

$$\mathfrak{Z} = (\Omega'_+) + (\Omega'_-) \tag{3a}$$

unter Umständen eine völlig andere Zerlegung von $\mathfrak{Z}$ und die Transformation

$$(\Omega_+) \rightarrow (\Omega'_+)$$

ist nur unitär (d.h. normerhaltend), wenn $(\Omega_+) = (\Omega'_+)$, die Zerlegungen also identisch sind. Mit Hilfe von Satz 1 kann man aber beliebig viele verschiedene Zerlegungen von $\mathfrak{Z}$ aufbauen. Ist z.B. ψ_+ ein Vektor aus (Ω_+), ψ_- einer aus (Ω_-), so hat der Vektor $\psi' = 2\psi_+ - \psi_-$ die Norm 1 und folglich gibt es ein vollständiges Orthonormalsystem Ω' mit $\psi' \in \Omega'_+$.

Liefert also eine Theorie einen Hilbert-Raum mit indefiniter Metrik, so liegt in der Zuordnung der „physikalischen" Zustände zu den Vektoren aus $\mathfrak{Z}$ der Zerlegung (3) ein Akt völliger Willkür: Es wird willkürlich eine Zerlegung (3) ausgewählt, wobei die verschiedenen Möglichkeiten der Auswahl dieser Zerlegung zu in $\mathfrak{Z}$ *inäquivalenten* eigentlichen Hilbert-Räumen führen. Eine willkürfreie Zerlegung in „physikalische' und „Geisterzustände" ist deshalb nicht ohne weiteres möglich. Wir werden zeigen, daß trotz dieses Umstandes eine willkürfreie und sinnvolle Quantentheorie mit indefiniter Metrik möglich ist.

5. Zerlegende Systeme Hermitescher Operatoren

Sei A ein Hermitescher Operator, d.h. es sei

$$\langle A\psi_1, \psi_2\rangle = \langle \psi_1, A\psi_2\rangle, \qquad \psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{Z}.$$

Es ist trivial, daß dann

$$\langle \psi, A\psi\rangle = \langle A\psi, \psi\rangle (= \langle \psi, A\psi\rangle^*)$$

immer reell ist. Die Hermiteschen Operatoren haben also reelle „Erwartungswerte" und es ist die Beziehung

Observable $\leftrightarrow$ Hermitescher Operator gerettet, wenn es gelingt, eine entsprechende Normierungsvorschrift zu gewinnen.

Dies geht tatsächlich. Der eigentliche Trick dabei ist: Die Normierungsvorschrift ist nicht für alle Hermiteschen Operatoren einheitlich gegeben, sondern jedem „genügend vollständigem", kommutierenden (d.h. gleichzeitig meßbaren!) System von Hermiteschen Operatoren entspricht eine diesem System eigentümliche Normierungsvorschrift.

Hat man einen Hermiteschen Operator A mit reinem Punktspektrum (was wir der Einfachheit halber immer annehmen wollen), so kann man ein Orthonormalsystem Ω bestimmen, dessen Elemente Eigenfunktionen von A sind; denn erstens sind die zu verschiedenen Eigenwerten gehörenden Vektoren orthogonal zueinander und zweitens kann man den zu einem bestimmten Eigenwert λ gehörenden Raum der Eigenvektoren nach der in Nr. 3 beschriebenen Methode orthonormalisieren. Bei einem Hermiteschen Operator kann es nun vorkommen, daß es zu gleichem Eigenwert λ sowohl Eigenfunktionen in Ω_+ als auch in Ω_- gibt. Zu einem solchen Operator kann man keine eindeutige Zerlegung (3) konstruieren. Analoges gilt für Systeme kommutierender Hermitescher Operatoren.

Definition: Ein System

$$\mathfrak{S} = \{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_s\}$$

von kommutierenden Hermiteschen Operatoren heißt genau dann *zerlegend* (oder einfach „z-System"), wenn gilt: Ist λ_k ein Eigenwert von $A_k (k = 1, \ldots, s)$, so ist der lineare Raum aller ψ mit

$$A_k \psi = \lambda_k \psi \qquad (k = 1, \ldots, s)$$

entweder leer oder die Metrik ist auf ihm definit. Nach der obigen Bemerkung über Orthonormalsysteme, die aus Eigenvektoren bestehen, gilt dann

Satz 2: Zu jedem zerlegenden System

$$\mathfrak{S} = \{A_1, A_2, \ldots, A_s\}$$

kommutierender Hermitescher Operatoren gehört genau eine Zerlegung

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_+(\mathfrak{S}) + \mathfrak{Z}_-(\mathfrak{S})$$

mit

$$A_k \mathfrak{Z}_+(\mathfrak{S}) \subseteq \mathfrak{Z}_+(\mathfrak{S}), \qquad A_k \mathfrak{Z}_-(\mathfrak{S}) \subseteq \mathfrak{Z}_-(\mathfrak{S}),$$

und diese Zerlegung ist wiefolgt gewinnbar: Ist Ω ein vollständiges Orthonormalsystem, das aus gemeinsamen Eigenfunktionen der Operatoren A_k besteht, so ist

$$\mathfrak{Z}_+(\mathfrak{S}) = (\Omega_+), \qquad \mathfrak{Z}_-(\mathfrak{S}) = (\Omega_-).$$

Ganz einfach ergibt sich heraus:

Satz 3: Seien $\mathfrak{S}^0$ und $\mathfrak{S}$ zwei Systeme kommutierender Hermitescher Operatoren und jeder zu $\mathfrak{S}^0$ gehörende Operator gehöre auch zu $\mathfrak{S}$: $\mathfrak{S}^0 \subset \mathfrak{S}$. Ist dann $\mathfrak{S}^0$ zerlegend, so ist es auch $\mathfrak{S}$ und es gilt

$$\mathfrak{Z}_+(\mathfrak{S}) = \mathfrak{Z}_+(\mathfrak{S}^0), \qquad \mathfrak{Z}_-(\mathfrak{S}) = \mathfrak{Z}_-(\mathfrak{S}^0).$$

Denn jedes zur Konstruktion von $\mathfrak{Z}_+(\mathfrak{S}^0)$ usw. benutzbare Orthonormalsystem gemeinsamer Eigenfunktionen der Operatoren von $\mathfrak{S}$ ist auch zur Konstruktion von $\mathfrak{Z}_-(\mathfrak{S})$ usw. verwendbar.

Bemerkung: Ist die Metrik definit, so ist *jedes* System zerlegend und $\mathfrak{Z}_+(\mathfrak{S}) = \mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}_-(\mathfrak{S}) = 0$. Hiernach sind alle Größen, die abhängen von 1) Zustandsvektoren, 2) einem Hermiteschen Operator und 3) einem z-System von Operatoren, das diesen enthält, so beschaffen, daß die Abhängigkeit von z-System bei positiv-definiter Metrik unterbleibt. Diese Abhängigkeit ist also ein Charakteristikum der indefiniten Metrik allein!

Wir können jetzt eine Quantentheorie wiefolgt aufbauen: Bleibt man innerhalb eines z-Systems (oder eines dieses System umfassenden Systems), so geschieht alles wie in einer Theorie mit positiv-definiter Metrik. Der Übergang zu einem anderen System gleichzeitig meßbarer Größen erfolgt jedoch (unter Umständen) unter gleichzeitiger Abänderung der Norm. Im Folgenden skizzieren wir wichtige Züge eines solchen Aufbaues.

6. Norm, Erwartungswert und Übergangswahrscheinlichkeit

Wir nehmen an, $\mathfrak{S} = \{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$ sei ein zerlegendes System untereinander kommutierender Hermitescher Operatoren.

a) Wir definieren eine $\mathfrak{S}$-*Metrik in* $\mathfrak{Z}$ wie folgt: Sind ψ, ψ' zwei Vektoren aus $\mathfrak{Z}$, so gibt es genau eine Zerlegung

$$\begin{matrix} \psi = \psi_+ + \psi_- \\ \psi' = \psi'_+ + \psi'_- \end{matrix} \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} \psi_+, \psi'_+ \in \mathfrak{Z}_+(\mathfrak{S}), \\ \psi_-, \psi'_- \in \mathfrak{Z}_-(\mathfrak{S}). \end{matrix} \tag{4a}$$

Wir setzen dann

$$\langle \psi, \psi' \rangle_{\mathfrak{S}} = \langle \psi_+, \psi'_+ \rangle - \langle \psi_-, \psi'_- \rangle. \tag{4b}$$

Dies ist eine durch $\mathfrak{S}$ *eindeutig bestimmte, positiv definite Metrik.*

b) Alle Operatoren A_k aus $\mathfrak{S}$ sind Hermitesch bezüglich der eben bestimmten Metrik $\langle \psi, \psi' \rangle_{\mathfrak{S}}$. Dies folgt aus zwei Tatsachen: Einmal sind die A_k Hermitesch bezüglich der indefiniten Metrik $\langle \psi, \psi' \rangle$ nach Voraussetzung und zum anderen lassen sie nach Satz 2 die zur Definition der positiv definiten Metrik benutzten Teilräume $\mathfrak{Z}_+(\mathfrak{S})$, $\mathfrak{Z}_-(\mathfrak{S})$ invariant.

c) Als Erwartungswert für den zu $\mathfrak{S}$ gehörenden Operator A definieren wir

$$\bar{A} = \frac{\langle \psi, A\psi \rangle_{\mathfrak{S}}}{\langle \psi, \psi \rangle_{\mathfrak{S}}}. \tag{5}$$

d) Als Übergangswahrscheinlichkeit von Zustand ψ_1 zu Zustand ψ_2 bezüglich der Messung aller $A_k \in \mathfrak{S}$ definieren wir

$$W_{\psi_1, \psi_2}(\mathfrak{S}) = \frac{|\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_{\mathfrak{S}}|^2}{\langle \psi_1, \psi_1 \rangle_{\mathfrak{S}} \langle \psi_2, \psi_2 \rangle_{\mathfrak{S}}}. \tag{6}$$

Die Messung der Übergangswahrscheinlichkeit besteht in einer „Spektralzerlegung" der Zustände ψ_1 und ψ_2 nach einem einzigen vollständigem System gemeinsam meßbarer Observablen. Es ist deshalb prinzipiell angänglich, daß in die Definition der Übergangswahrscheinlichkeit die zu ihrer Messung benutzten Operatoren eingehen.

Folgerung 1: Wegen Formel (6) stellen wir fest, daß stets

$$W_{\psi,\psi'} \geqq 0 \tag{7}$$

ist.

Folgerung 2: Da die Räume $\mathfrak{Z}_+(\mathfrak{S})$, $\mathfrak{Z}_-(\mathfrak{S})$ zueinander orthogonal sind (und zwar sowohl bezüglich der Metrik $\langle\psi, \psi'\rangle$ als auch bezüglich der Metrik $\langle\psi, \psi'\rangle_{\mathfrak{S}}$), ist automatisch

$$W_{\psi_+,\psi_-}(\mathfrak{S}) = 0 \quad \text{für} \quad \psi_+ \in \mathfrak{Z}_+(\mathfrak{S}), \qquad \psi_- \in \mathfrak{Z}_-(\mathfrak{S}). \tag{8}$$

Dies garantiert, daß bezüglich der Analyse der Zustände nach Operatoren aus $\mathfrak{S}$ Übergänge von Zuständen aus $\mathfrak{Z}_+(\mathfrak{S})$ in solche aus $\mathfrak{Z}_-(\mathfrak{S})$ und umgekehrt absolut verboten sind.

Folgerung 3: Sei A aus $\mathfrak{S}$ und sei ψ Eigenvektor von A mit Eigenwert λ. Es ist

$$\bar{A} = \lambda. \tag{9}$$

Zusammenfassend können wir sagen: Zu jedem Satz kommutierender Hermitescher Operatoren, die ein zerlegendes System bilden, gehört genau eine Zerlegung (3) und genau eine positiv-definite Metrik (4) auf $\mathfrak{Z}$. Bleibt man innerhalb dieses Systems kommutierender Operatoren, so bleiben alle Formeln und Schlüsse wie in einer Quantentheorie mit positiv-definiter Metrik. Übergänge von $\mathfrak{Z}_+(\mathfrak{S})$ nach $\mathfrak{Z}_-(\mathfrak{S})$ und umgekehrt sind dabei verboten.

Der Übergang zu einem *anderen* z-System kommutierender Operatoren entspricht im allgemeinen dem Übergang zu einer *anderen* Zerlegung von $\mathfrak{Z}$ und einer *anderen* definiten Metrik (4). Dieser Übergang ist *nicht* durch eine unitäre Transformation mit der ursprünglichen Zerlegung verbunden.

Literatur

1) N. I. Achieser und I. G. Glasmann, Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum (Berlin, 1954)
2) R. Ascoli und E. Minardi, Nuclear Physics **9** (1958/59) 242
3) H. A. Bethe, F. de Hoffmann und S. S. Schweber, Mesons and fields, vol. 1 (New York, 1955)
4) P. A. M. Dirac, The principles of quantum mechanics (Cambridge, 1957)
5) W. Heisenberg, Nuclear Physics **4** (1957) 532