

Als Manuskript gedruckt

Aus dem Mathematischen Institut

Zur zweiten Quantelung bei symmetrischer Statistik

Von ARMIN UHLMANN

1. Die Zustandsfunktionen

Als Zustandsvektoren eines Systems gleicher Mikroteilchen können bekanntlich die Summen der Gestalt

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1(x_1) + \Psi_2(x_1, x_2) + \dots, \quad (1)$$

$$\Psi_0 = \text{konstant}$$

gewählt werden, wobei x_j einen vollständigen Satz mechanischer Größen des j -ten Teilchens bezeichnet [W. Fock; Z. Phys. 75].

Wir nehmen nun an, daß (1) ein System von *Bose-Teilchen* beschreibt und daß deshalb die $\Psi_k(x_1, \dots, x_k)$ in den x_j symmetrisch sind. Wir wollen zeigen, daß dann eine ganz andere Gesamtheit mathematischer Objekte als Raum der Zustandsvektoren gewählt werden kann. Wir nehmen hierzu an, \mathfrak{B} sei der komplexe Hilbert-Raum der Zustände mit der Teilchenzahl 1 und betrachten eine quadratisch integrierbare Summe (1):

$$\sum_k \int |\Psi_k(x_1, \dots, x_k)|^2 dx_1 dx_2 \dots dx_k < \infty.$$

Jeden solchen quadratisch integrierbaren Zustandsvektor Ψ wird dann eindeutig eine Funktion $\Psi[u]$ auf \mathfrak{B} zugeordnet durch die Vorschrift: (*)

$$\Psi[u] = \Psi_0 + \Psi_1[u] + \Psi_2[u] + \dots; \quad (2)$$

$$\Psi_k[u] = \int \Psi_k(x_1, \dots, x_k) \overline{u(x_1)} \overline{u(x_2)} \dots \overline{u(x_k)} dx_1 \dots dx_k.$$

(*) Nach Fertigstellung der Arbeit erschien in Heft 1/2 der Fortschr. Phys. VI (1958) ein Artikel von J.V. Novozilov und A.V. Tulub „Die Methode der Funktionale in der Quantentheorie“. Hiernach wurden die durch Formel (2) gegebenen Zustandsfunktionen schon durch W. A. Fock (Z. Phys. 49, S. 339 ff.) eingeführt und tragen den Namen „Focksche Funktionale“ („Methode der erzeugenden Funktionale“). Der Unterschied zur Fockschen Definition

$$\Psi[u] = \sum \frac{1}{\sqrt{k!}} \Psi_k[u] \quad (2')$$

ist für alle Betrachtungen der Arbeit unwesentlich. Die Tatsache, daß (2) – im Gegensatz zu (2') – unter Umständen nur in einer Umgebung der Null von \mathfrak{B} konvergiert, ist ungefährlich, da das in Nr. 6 eingeführte Skalarprodukt „lokaler“ Natur ist. Genauer: Sind Ψ_1, Ψ_2 und Ψ_1', Ψ_2' Zustandsfunktionen mit

$$\Psi_1[u] = \Psi_1'[u], \quad \Psi_2[u] = \Psi_2'[u]$$

in einer Umgebung der Null von \mathfrak{B} , so ist

$$\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle = \langle \Psi_1', \Psi_2' \rangle.$$

Für den weiteren Aufbau der Fockschen Methode siehe auch Fock, Phys. Zeitschr. Sowjetunion, 6, S. 426 ff.

Diese Funktion kann ebenso zur Charakterisierung des betrachteten Systems gleicher Bose-Teilchen dienen wie der Zustandsvektor (1). Wir bezeichnen sie deshalb als *Zustandsfunktion* des gegebenen Systems.

Sind Ψ, Ψ', Ψ'' drei Zustandsvektoren mit $\Psi = \alpha' \Psi' + \alpha'' \Psi''$, (α', α'' komplexe Zahlen), so ist auch $\Psi[u] = \alpha' \Psi'[u] + \alpha'' \Psi''[u]$. Etwas schwieriger ist der Nachweis, daß aus $\Psi[u] = \Psi'[u]$ für alle $u \in \mathfrak{B}$ stets $\Psi = \Psi'$ folgt. Hierzu langt es, eine Zustandsfunktion zu betrachten, für die $\Psi[u] = 0$ für alle $u \in \mathfrak{B}$ ist. Hat Ψ die Gestalt (1), so ist nach (2)

$$0 = \Psi[\lambda u] = \sum \lambda^k \Psi_k[u], \quad \lambda \text{ reell,}$$

für genügend kleine λ und deshalb $\Psi_k[u] = 0$ für alle k . Ist u_1, u_2, \dots ein vollständiges Orthogonalsystem von \mathfrak{B} , so besitzt $\Psi_k(x_1, \dots, x_k)$ eine Fourierreentwicklung

$$\Psi_k(x_1, \dots, x_k) = \sum c_{j_1 \dots j_k} u_{j_1}(x_1) \dots u_{j_k}(x_k)$$

mit in den Indices symmetrischen Koeffizienten. Wir wählen eine beliebige natürliche Zahl m und betrachten das Element

$$u(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_j u(x) \quad \varepsilon \mathfrak{B}.$$

Nach Definition der $\Psi_k[u]$ ist

$$\Psi_k[u] = \sum_{j_l \geq m} c_{j_1 \dots j_k} \alpha_{j_1} \dots \alpha_{j_k}.$$

Bezüglich der $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ist nun $\Psi_k[u]$ ein identisch verschwindendes Polynom mit in den Indices symmetrischen Koeffizienten. Hieraus schließen wir, daß diese Koeffizienten verschwinden. Da m beliebig gewählt werden kann, folgt aus der Voraussetzung das Verschwinden aller Fourierkoeffizienten und deshalb ist tatsächlich $\Psi_k(x_1, \dots, x_k) = 0$.

Es besteht also eine eindeutige Zuordnung

Zustandsvektor \longleftrightarrow Zustandsfunktion.

Dabei entspricht jedem quadratisch integrierbaren Zustandsvektor genau eine Zustandsfunktion, während umgekehrt nicht zu jeder Zustandsfunktion ein Zustandsvektor gehört. Der Bereich der Zustandsfunktionen wird Zustände repräsentieren können, die durch Zustandsvektoren nicht dargestellt werden können.

2. Anzahloperatoren

Nach der physikalischen Deutung von (1) beschreibt $\Psi_k(x_1, \dots, x_k)$ einen Zustand mit genau k Teilchen. Der

Operator der Anzahl der Teilchen wird deshalb durch $N\Psi = \Psi_1(x_1) + 2\Psi_2(x_1, x_2) + 3\Psi_3(x_1, x_2, x_3) + \dots$ erklärt. Aus (1) und (2) folgt nun

$$\Psi[\lambda u] = \sum \lambda^k \Psi_k[u],$$

und die als Exponenten auftretenden Zahlen sind wieder die Eigenwerte von N . Um dies auszunutzen definieren wir die einparametrische Gruppe $\sigma(s)$ von Transformationen durch

$$\sigma(s)\Psi[u] = \Psi[e^s u]$$

für eine beliebige Zustandsfunktion (s bedeute stets einen reellen Parameter). Die Berechnung der infinitesimalen Transformation dieser Gruppe ergibt:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sigma(s) - 1}{s} \Psi = \lim_{s \rightarrow 0} \sum_k \frac{e^{k \cdot s} - 1}{s} \Psi_k[u] = \sum_k k \cdot \Psi_k[u].$$

Dies veranlaßt uns, für eine beliebige Zustandsfunktion $\Psi[u]$ den Operator N durch

$$N\Psi = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sigma(s)\Psi - \Psi}{s} \quad (3)$$

zu definieren, wobei wir als Definitionsbereich von N die Gesamtheit derjenigen Funktionen auf \mathfrak{Z} ansehen, für die der Limes (3) existiert.

Das Vorgehen bei der Definition von N soll uns nun auch bei der Einführung derjenigen Anzahloperatoren leiten, deren Eigenwerte die Anzahlen der sich in bestimmten Zuständen befindlichen Teilchen sind.

Jedes Element $u \in \mathfrak{Z}$ repräsentiert einen möglichen Zustand eines Teilchens. Das Element $u' \in \mathfrak{Z}$ repräsentiert genau dann denselben Zustand wie u , wenn $u' = \lambda u$ mit einer von Null verschiedenen Zahl λ gilt. Die Zustände einzelner Teilchen entsprechen deshalb eindeutig denjenigen Unterräumen von \mathfrak{Z} , die von einem Element erzeugt werden können. Der zu einem Zustand gehörende Anzahloperator muß deshalb dem ganzen Unterraum invariant zugeordnet sein!

Wir versuchen nun gleich folgende allgemeine Fragestellung zu lösen:

\mathfrak{N} sei ein linearer Unterraum von \mathfrak{Z} .

Wie ist der Operator $N_{\mathfrak{N}}$ zu konstruieren, dessen Eigenwerte angeben, wieviele der vorhandenen Teilchen sich in Zuständen befinden, die durch Elemente von \mathfrak{N} repräsentiert werden können?

Sei π der zum Unterraum \mathfrak{N} gehörende Projektionsoperator. Er ist durch die Eigenschaften

- 1) $\pi = \pi^*$ (π ist selbstadjungiert),
- 2) $\pi = \pi^2$
- 3) $\pi \mathfrak{Z} = \mathfrak{N}$

gekennzeichnet. Die Gruppe

$$\sigma(\mathfrak{N}, s)\Psi[u] = \Psi[e^s \pi u + (1 - \pi)u] = \Psi[e^{\pi s} u] \quad (4)$$

kann als Verallgemeinerung von $\sigma(s)$ angesehen werden; denn

$$\begin{aligned} \sigma(\mathfrak{N}, s)\Psi[u] &= \sigma(s)\Psi[u] && \text{für } u \in \mathfrak{N}, \\ \sigma(\mathfrak{N}, s)\Psi[u] &= \Psi[u] && \text{für } u \perp \mathfrak{N}. \end{aligned}$$

Dieses Verhalten legt die Definition

$$N_{\mathfrak{N}}\Psi[u] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sigma(\mathfrak{N}, s)\Psi[u] - \Psi[u]}{s} \quad (5)$$

nahe.

Zur weiteren Rechtfertigung untersuchen wir gleich die Gruppen und Operatoren

$$\sigma_{\alpha}(\mathfrak{N}, s)\Psi[u] = \Psi[e^{\alpha s} u] \quad (4a)$$

$$N_{\mathfrak{N}}^{(\alpha)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sigma_{\alpha}(\mathfrak{N}, s) - 1}{s} \quad (5a)$$

wobei α eine beliebige komplexe Zahl ist.

Seien $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ zwei Unterräume von \mathfrak{Z} und π_1, π_2 die zugehörigen Projektionsoperatoren, von denen wir $\pi_1 \pi_2 = \pi_2 \pi_1$ voraussetzen. Dann ist $\pi_1 \cdot \pi_2$ der zum Durchschnitt $\mathfrak{N}_1 \wedge \mathfrak{N}_2$ gehörende Projektor, während $\pi_1 + \pi_2 - \pi_1 \pi_2$ zur Summe $\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2$ gehört.

Da die Projektoren π_k voraussetzungsgemäß kommutieren, ist

$$\sigma_{\alpha_1}(\mathfrak{N}_1, s_1) \sigma_{\alpha_2}(\mathfrak{N}_2, s_2)\Psi[u] = \Psi[e^{\alpha_1 \pi_1 s_1 + \alpha_2 \pi_2 s_2} u]. \quad (x)$$

Aus dieser Formel erkennen wir, daß die Gruppen $\sigma_{\alpha_1}(\mathfrak{N}_1, s)$ und $\sigma_{\alpha_2}(\mathfrak{N}_2, s)$ vertauschbar sind. Deshalb kommutieren auch die zu ihnen gehörenden infinitesimalen Operatoren:

$$N_{\mathfrak{N}_1}^{(\alpha_1)} N_{\mathfrak{N}_2}^{(\alpha_2)} = N_{\mathfrak{N}_2}^{(\alpha_2)} N_{\mathfrak{N}_1}^{(\alpha_1)}. \quad (6)$$

Eine zweite Folge aus der Kommutativität der Gruppen ist

$$N_{\mathfrak{N}_1}^{(\alpha_1)} + N_{\mathfrak{N}_2}^{(\alpha_2)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sigma_{\alpha_1}(\mathfrak{N}_1, s) \sigma_{\alpha_2}(\mathfrak{N}_2, s) - 1}{s}. \quad (xx)$$

Zur Auswertung dieser Formel betrachten wir zwei Fälle:

a) Setzt man in (x) $s_1 = s_2 = s$ und $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, so folgt aus der Umformung $\pi_1 + \pi_2 = \pi_1 \pi_2 + (\pi_1 + \pi_2 - \pi_1 \pi_2)$ nach (x)

$$\sigma_{\alpha}(\mathfrak{N}_1, s) \sigma_{\alpha}(\mathfrak{N}_2, s) = \sigma_{\alpha}(\mathfrak{N}_1 \vee \mathfrak{N}_2, s) \cdot \sigma_{\alpha}(\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2, s).$$

Nach Vergleich mit (xx) können wir die wichtige Formel

$$N_{\mathfrak{N}_1}^{(\alpha)} + N_{\mathfrak{N}_2}^{(\alpha)} = N_{\mathfrak{N}_1 \vee \mathfrak{N}_2}^{(\alpha)} + N_{\mathfrak{N}_1 \wedge \mathfrak{N}_2}^{(\alpha)} \quad (7)$$

als bestätigt ansehen. Wir deuten sie folgendermaßen: Ist n_k die Anzahl der Teilchen, die sich in zu \mathfrak{N}_k gehörenden Zuständen befinden, so ist $n_1 + n_2$ die Anzahl der Teilchen, die entweder zu \mathfrak{N}_1 oder zu \mathfrak{N}_2 - also zu $\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2$ - gehören, vermehrt um die Anzahl derjenigen Teilchen, deren Zustände sich sowohl durch Elemente von \mathfrak{N}_1 , als auch durch Elemente von \mathfrak{N}_2 - also durch Elemente von $\mathfrak{N}_1 \wedge \mathfrak{N}_2$ - repräsentieren lassen.

b) Wir untersuchen nun noch die Situation, die entsteht, wenn in (x) $s_1 = s_2 = s$ und $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}$ gesetzt wird. Durch Vergleich mit (xx) ist unmittelbar

$$N_{\mathfrak{N}}^{(\alpha_1)} + N_{\mathfrak{N}}^{(\alpha_2)} = N_{\mathfrak{N}}^{(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (8a)$$

abzulesen. Andererseits ist für reelles r

$$\sigma_{r\alpha}(\mathfrak{N}, s) = \sigma_{\alpha}(\mathfrak{N}, r s)$$

und deshalb

$$N_{\mathfrak{N}}^{(r\alpha)} = r \cdot N_{\mathfrak{N}}^{(\alpha)}. \quad (8b)$$

Sind nun α_1, α_2 zwei komplexe Zahlen, deren Quotient nicht reell ist, so besitzt jede beliebige komplexe Zahl α genau eine Darstellung $\alpha = r_1 \alpha_1 + r_2 \alpha_2$ mit reellen r_1, r_2 und es ist

$$N_{\mathfrak{N}}^{(\alpha)} = r_1 N_{\mathfrak{N}}^{(\alpha_1)} + r_2 N_{\mathfrak{N}}^{(\alpha_2)}. \quad (8c)$$

Für festes \mathfrak{N} spannen also die Operatoren $N_{\mathfrak{N}}^{(\alpha)}$ einen reellen Vektorraum der Dimension 2 auf.

Um jetzt die Bedeutung der Zahl α in $N_{\mathfrak{N}}^{(\alpha)}$ zu erkennen, langt es, sich auf den Fall $\mathfrak{N} = \mathfrak{Z}$ zu beschränken. Wir nehmen an, daß $\Psi[\lambda u]$ bei festem $u \in \mathfrak{Z}$ eine reell-analytische Funktion der komplexen Zahl λ ist. Diese Voraussetzung über $[u]$ schreibt sich

$$\Psi[\lambda u] = \sum_{k,l} \lambda^k \bar{\lambda}^l \Psi_{kl}[u] \quad (9a)$$

$$\Psi_{kl}[\lambda u] = \lambda^k \bar{\lambda}^l \Psi_{kl}[u] \quad (9b)$$

Ψ besitzt somit eine eindeutige Entwicklung nach Funktionen, die sich gemäß (9b) transformieren. Aus diesem Transformationsgesetz folgt

$$N^{(\alpha)} \Psi_{kl} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^{(\alpha k + \bar{\alpha} l)s} - 1}{s} \Psi_{kl}.$$

Die Ψ_{kl} sind also Eigenfunktionen von $N^{(\alpha)}$:

$$N^{(\alpha)} \Psi_{kl} = (\alpha k + \bar{\alpha} l) \Psi_{kl}. \quad (9c)$$

Da wir daran festhalten, daß $N = N^{(1)}$ der Operator der Teilchenzahl ist, sehen wir in Ψ_{kl} einen Zustand mit genau $k + l$ Teilchen. Die weitere Diskussion erfolgt zwanglos aus der Annahme, daß es sich um geladene Teilchen (\mathfrak{Z} ist komplexer Raum) handelt. Setzen wir also fest, daß Ψ_{kl} einen Zustand mit genau k positiven und l negativen Teilchen beschreibt.

Wir definieren deshalb zwei lineare Operatoren, die den Anzahlen der positiven bzw. negativen Teilchen zugeordnet sind, durch

$$N^+ \Psi_{kl} = k \cdot \Psi_{kl}; \quad N^- \Psi_{kl} = l \Psi_{kl}. \quad (10a)$$

Der Operator der Anzahl der Elementarladungen ist demgemäß

$$Q = N^+ - N^- \quad (10b)$$

während wir für den Operator der Teilchenzahl die Darstellung

$$N = N^+ + N^- \quad (10c)$$

erhalten. Nun folgt aus (9c)

$$N^{(i)} \Psi_{kl} = i(k - l) \Psi_{kl} = i(N^+ - N^-) \Psi_{kl}$$

und somit ist

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{i} N^{(i)}, \\ N^+ &= \frac{1}{2} (Q + N) = \frac{1}{2} (N - i N^{(i)}), \\ N^- &= \frac{1}{2} (N - Q) = \frac{1}{2} (N + i N^{(i)}). \end{aligned} \quad (11)$$

Nunmehr können wir für einen beliebigen Unterraum \mathfrak{R} von \mathfrak{Z}

$$\begin{aligned} Q_{\mathfrak{R}} &= \frac{1}{i} N_{\mathfrak{R}}^{(i)} \\ N_{\mathfrak{R}}^+ &= \frac{1}{2} (N_{\mathfrak{R}} + Q_{\mathfrak{R}}) \\ N_{\mathfrak{R}}^- &= \frac{1}{2} (N_{\mathfrak{R}} - Q_{\mathfrak{R}}) \end{aligned} \quad (12)$$

setzen. Dabei wird z. B. der Operator $N_{\mathfrak{R}}^+$ gedeutet als der Operator für die Anzahl derjenigen Teilchen, die sich a) in einem durch \mathfrak{R} definierten Zustand befinden und b) positive Ladung tragen.

Aus den Formeln (6) und (7) schließt man: Sind die zu den Unterräumen $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$ gehörenden Projektoren vertauschbar, so übertragen sich die Formeln (6) und (7) sinngemäß auf alle in (14) erklärten Operatoren.

Wir betrachten noch den Operator der Ladungsvertauschung, das heißt denjenigen Operator, der einen Zustand mit k positiven und l negativen Teilchen in einen solchen mit l positiven und k negativen Teilchen verwandelt. Dieser Operator ist gerade durch den antilinearen Operator gegeben, der eine beliebige Zustandsfunktion in die zu ihr konjugierte komplexe überführt:

$$C \Psi[u] = \overline{\Psi[u]}. \quad (13a)$$

Er hat die Eigenschaft

$$C = C^{-1} \quad (13b)$$

und aus (5a) folgt leicht, daß

$$N_{\mathfrak{R}}^{(\alpha)} C = C N_{\mathfrak{R}}^{(\alpha)} \quad (13c)$$

gilt. Deshalb gilt nach (12)

$$\begin{aligned} N_{\mathfrak{R}} C &= C N_{\mathfrak{R}}; \quad Q_{\mathfrak{R}} C = -C Q_{\mathfrak{R}} \\ N_{\mathfrak{R}}^+ C &= C N_{\mathfrak{R}}^-, \end{aligned} \quad (14)$$

was unsere Behauptung beweist.

Allgemeine Bemerkung: Als linearen Raum der Zustände haben wir einen komplexen Hilbert-Raum zugrunde gelegt. Wir haben jedoch von der Tatsache, daß in dem komplexen linearen Raum der Zustände ein Skalarprodukt gegeben ist, keinen Gebrauch gemacht. Die bisherige Entwicklung überträgt sich deshalb ohne große Änderungen auf den Fall, daß im linearen Raum der Zustände das Skalarprodukt nicht oder nur teilweise definiert ist (Distributionen). Diese Bemerkung gilt auch für wesentliche Teile der folgenden Entwicklung, wenn auch auf die Herausstellung dieser Tatsache kein Wert gelegt wurde.

3. Ableitungsoperatoren

Unter einem „Ring von Zuständen“ sei eine Menge R von Zustandsfunktionen verstanden, die mit den Funktionen Ψ_1 und Ψ_2 auch die Funktionen $\Psi_1 \pm \Psi_2$ und $\Psi_1 \cdot \Psi_2$ und mit der Funktion Ψ auch die Funktion $\alpha \Psi$ ($\alpha =$ bel. komplexe Zahl) enthält.

Unter einer „Basis“ von R verstehen wir eine Teilmenge γ von Funktionen aus R mit der Eigenschaft: Jeder Ring von Zuständen \hat{R} , der die Menge γ enthält, enthält sämtliche Elemente von R .

Gegeben sei ein Ring von Zuständen R . Als Ableitungsoperator A auf R wird jeder Operator

$$R \ni \Psi \rightarrow A \Psi \in R$$

von R in sich bezeichnet, der den folgenden zwei Axiomen genügt:

- 1) $A(\alpha_1 \Psi_1 + \alpha_2 \Psi_2) = \alpha_1 A \Psi_1 + \alpha_2 A \Psi_2$,
- 2) $A(\Psi_1 \cdot \Psi_2) = A \Psi_1 \cdot \Psi_2 + \Psi_1 \cdot A \Psi_2$.

Ist $\varrho(s)$ eine Gruppe von Transformationen (Automorphismen) von R in sich

$$\begin{aligned}\varrho(s)(\alpha_1 \Psi_1 + \alpha_2 \Psi) &= \alpha_1 \varrho(s) \Psi_1 + \alpha_2 \varrho(s) \Psi_2, \\ \varrho(s)(\Psi_1 \Psi_2) &= \varrho(s) \Psi_1 \cdot \varrho(s) \Psi_2, \\ \varrho(s_1 + s_2) &= \varrho(s_1) \cdot \varrho(s_2), \\ \varrho(0) &= \text{Identität},\end{aligned}$$

so ist die durch

$$A\Psi = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\varrho(s)\Psi - \Psi}{s}$$

definierte infinitesimale Transformation A ein Ableitungsoperator. Regel 1) ist selbstverständlich, Regel 2) folgt aus

$$\begin{aligned}\varrho(s)(\Psi_1 \Psi_2) - \Psi_1 \Psi_2 &= [\varrho(s)\Psi_1 - \Psi_1] \cdot \varrho(s)\Psi_2 \\ &+ [\varrho(s)\Psi_2 - \Psi_2] \cdot \Psi_1.\end{aligned}$$

Auf Grund der Gesetze 1) und 2) sind folgende Regeln sofort nachprüfbar:

Sind A und B Ableitungsoperatoren und α, β komplexe Zahlen, so sind auch

$$\alpha A + \beta B \quad \text{und} \quad AB - BA$$

Ableitungsoperatoren. Ist Ψ ein Element aus R , so ist mit A auch $\Psi \cdot A$ ein Ableitungsoperator.

Wesentlich erleichtert wird das Rechnen mit Ableitungsoperatoren durch folgende Tatsache:

Ist γ eine Basis von R und sind A_1, A_2 Ableitungsoperatoren auf R , für die

$$A_1 \Psi = A_2 \Psi \quad \text{für alle} \quad \Psi \in \gamma$$

gilt, so ist

$$A_1 = A_2$$

auf ganz R .

Zum Beweis betrachten wir die Menge aller $\Psi \in R$, die durch den Ableitungsoperator $A = A_1 - A_2$ auf die Null abgebildet werden ($A\Psi = 0$). Diese Menge ist ein in R enthaltener Ring von Zuständen R_0 ; denn nach 1) und 2) folgt aus $A\Psi_1 = A\Psi_2 = 0$

$$A(\alpha_1 \Psi_1 + \alpha_2 \Psi_2) = 0, \quad A(\Psi_1 \cdot \Psi_2) = 0.$$

Da $\gamma \in R_0$ nach Voraussetzung gilt und γ eine Basis von R ist, muß $R_0 = R$ und somit $A_1 \Psi - A_2 \Psi = A\Psi = 0$ für alle $\Psi \in R$ sein.

Ableitungsoperatoren haben die Eigenschaft, daß die Gesamtheit ihrer Eigenfunktionen multiplikativ abgeschlossen ist: Sind Ψ_1, Ψ_2 zwei Eigenfunktionen des Ableitungsoperators A

$$A\Psi_k = \lambda_k \Psi_k, \quad k = 1, 2$$

so ist wegen Regel 2)

$$A(\Psi_1 \Psi_2) = \lambda_1 \Psi_1 \cdot \Psi_2 + \Psi_1 \cdot \lambda_2 \Psi_2 = (\lambda_1 + \lambda_2) \Psi_1 \Psi_2.$$

Also ist das Produkt zweier Eigenfunktionen wieder eine Eigenfunktion, deren Eigenwert die Summe der Eigenwerte ihrer Faktoren ist. Durch Induktion erkennt man:

Sind Ψ_1, \dots, Ψ_r Eigenfunktionen von A mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, so ist

$$\Psi_1^{m_1} \Psi_2^{m_2} \dots \Psi_r^{m_r}$$

wieder eine Eigenfunktion von A mit Eigenwert

$$m_1 \lambda_1 + \dots + m_r \lambda_r.$$

Für die weiteren Betrachtungen wählen wir einen möglichst einfachen Ring von Zuständen R aus, auf dem erstens alle wichtigen Ableitungsoperatoren wohldefiniert sind und der zweitens genügend „vollständig“ ist. Das letztere soll heißen: Nach Einführung eines geeigneten Konvergenzbegriffes (nach einer geeigneten Topologisierung) sollen möglichst alle in Frage kommenden Zustandsfunktionen durch Elemente aus R approximierbar sein. Unter geeigneten Stetigkeitsvoraussetzungen für die Ableitungsoperatoren können dann die auf R gewonnenen Regeln auch auf die Grenzfunktionen von R übertragen werden.

Wir wählen als R den Ring der Polynome mit komplexen Koeffizienten in den reellen Linearformen über \mathfrak{Z} :

R ist derjenige Ring von Zuständen, der eine Basis γ besitzt, die besteht aus:

- a) den auf \mathfrak{Z} konstanten Funktionen und
- b) den reellen stetigen Linearformen auf \mathfrak{Z} .

Bekanntlich hat jede stetige reelle Linearform $l[u]$ auf dem Hilbertraum \mathfrak{Z} folgende Gestalt: Es gibt zwei Elemente v_1, v_2 in \mathfrak{Z} derart, daß

$$l[u] = (u, v_1) + (v_2, u)$$

ist.

Ein auf R erklärter Ableitungsoperator ist völlig bestimmt, wenn seine Wirkung auf die Linearformen bekannt ist; denn ist $\Psi[u] = \alpha$ für alle $u \in \mathfrak{Z}$ eine auf \mathfrak{Z} konstante Funktion, so folgt aus $\alpha \cdot \Psi = \Psi^2$ wegen der Regeln 1) und 2)

$$\alpha A\Psi = A\Psi \cdot \Psi + \Psi \cdot A\Psi = 2\alpha A\Psi.$$

Aus $\alpha A\Psi = 0$ folgt aber $A\Psi = 0$.

4. Quantelung linearer Operatoren

Sei a ein selbstadjungierter Operator in \mathfrak{Z} , der einer gewissen beobachtbaren Größe zugeordnet ist und \mathfrak{N} ein Unterraum von \mathfrak{Z} , dessen Elemente Zuständen entsprechen, bei denen diese Größe genau den Wert λ besitzt:

$$a u = \lambda u \quad \text{für} \quad u \in \mathfrak{N}.$$

Sei weiter $\Psi[u]$ eine Zustandsfunktion, die einem Zustand entspricht, in dem genau n Teilchen vorhanden sind, die sich in einem durch \mathfrak{N} gegebenen Zustand befinden:

$$N_{\mathfrak{N}} \Psi = n \Psi, \quad N \Psi = n \Psi.$$

Wir erwarten, daß die a entsprechende Größe auch im Mehrteilchenzustand Ψ einen genauen Wert besitzt – und zwar muß dieser $n \cdot \lambda$ sein. Die zweite Quantelung $[a]$ des Operators a von \mathfrak{Z} muß also für das spezielle Ψ die Wirkung

$$[a] \Psi = n \cdot \lambda \Psi$$

besitzen. Dies wird durch den Operator $\lambda N_{\mathfrak{N}}$ gewährleistet. Wenn jetzt a ein diskretes Spektrum besitzt:

$$\mathfrak{Z} = \sum \mathfrak{N}_k; \quad a u_k = \lambda_k u_k \quad \text{für} \quad u_k \in \mathfrak{N}_k,$$

so folgt aus der Forderung nach Linearität von $[a]$:

$$[a] = \sum \lambda_k \mathfrak{N}_k. \quad (15a)$$

Wir bezeichnen den Prozeß $a \rightarrow [a]$ als *Anzahlquantelung*, da wir annehmen, daß der Operator a gleichermaßen für positive und negative Teilchen gilt. Es kann aber auch

vorkommen, daß die betrachtete Observable ladungsabhängig ist. Dann gehört zu den positiven bzw. negativen Teilchen je ein Operator a_+ bzw. a_- . Auf Grund der Ladungssymmetrie kommt außer dem betrachteten Fall $a_+ = a_-$ nur noch $a_+ + a_- = 0$ in Frage. Setzen wir $a = a_+$, so haben wir an Stelle von (15a)

$$(a) = \sum \lambda_k Q_k \quad (15b)$$

zu schreiben. Der Prozeß $a \rightarrow (a)$ werde als *Ladungsquantelung* bezeichnet.

Beispiel: Ist \mathfrak{N} ein Unterraum von \mathfrak{B} und π der zu \mathfrak{N} gehörende Projektionsoperator, so ist

$$[\pi] = N_{\mathfrak{N}}, \quad (\pi) = Q_{\mathfrak{N}}. \quad (16)$$

Wir formen (15) so um, daß auch hermitesche Operatoren mit nicht-diskrettem Spektrum gequantelt werden können. In (15a) wird

$$N_s = \sum N_{\mathfrak{N}_k} \quad \text{mit} \quad \lambda_k \leq s$$

gesetzt, so daß das Stieltjesintegral

$$[a] = \int sdN_s$$

entsteht. Da $\mathfrak{N}_i \perp \mathfrak{N}_k$ für $i \neq k$ ist, gilt

$$N_s = N_{\mathfrak{N}(s)} \quad \text{falls} \quad \mathfrak{N}(s) = \sum \mathfrak{N}_k \quad \text{mit} \quad \lambda_k \leq s$$

gesetzt wird. Für den zum Raum $\mathfrak{N}(s)$ gehörenden Projektor $\pi(s)$ gilt nach (16)

$$N_s = [\pi(s)]$$

und folglich ist

$$[a] = \int sd[\pi(s)].$$

Nun ist $\pi(s)$ die zu a gehörende Zerlegung der Einheit. Man kann deshalb die nur für Operatoren mit diskrettem Spektrum gegebene Definition (15a) wie folgt verallgemeinern:

Ist a ein selbstadjungierter Operator und π_s die zu a gehörende Zerlegung der Einheit, so setzen wir

$$[a] = \int sd[\pi_s] \quad (17a)$$

$$(a) = \int sd(\pi_s). \quad (17b)$$

Der in (17) schon angeführte Fall der Ladungsquantelung wird analog behandelt.

Wir sehen nun aus (17), daß $[a]$ und (a) Grenzwerte von Summen sind, deren Glieder Ableitungsoperatoren sind. Hieraus schließt man auf die wichtige Tatsache:

$[a]$ und (a) sind Ableitungsoperatoren.

Mit Hilfe der letzten Aussage können wir zu einer anderen Darstellung von $[a]$ und (a) gelangen. Hierzu nehmen wir an, daß die Operatoren

$$e^{as} \quad \text{und} \quad e^{i a s}$$

wenigstens für kleine s existieren. Dann lautet die Behauptung:

$$[a]\Psi = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Psi[e^{as}u] - \Psi[u]}{s}, \quad (18)$$

$$(a)\Psi = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{i} \frac{\Psi[e^{i a s}u] - \Psi[u]}{s}.$$

Wir beweisen sie für Elemente aus dem am Ende von Nr. 3 definierten Ring von Zuständen R . Bezeichnen

wir die rechten Seiten von (18) mit $A\Psi$ bzw. $A'\Psi$. Nach einer allgemeinen Bemerkung in Nr. 3 sind A und A' Ableitungsoperatoren; denn sie sind die infinitesimalen Transformationen der Gruppen

$$\Psi[u] \rightarrow \Psi[e^{as}u] \quad \text{bzw.} \quad \Psi[u] \rightarrow \Psi[e^{i a s}u].$$

Es langt deshalb, die Gültigkeit von (18) für die Linearformen

$$\Psi[u] = (u, v_1) + (v_2, u)$$

zu zeigen. Nach (17) ist für diese Funktionen z. B.

$$(a)\Psi = \int sd(\pi_s) \{ (u, v_1) + (v_2, u) \}.$$

Nun ist

$$(\pi_r)(u, v_1) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{i} \frac{(e^{i \pi_r s} u, v_1) - (u, v_1)}{s} = (\pi_r u, v_1)$$

und analog folgt

$$(\pi_r)(v_2, u) = -(v_2, \pi_r u)$$

und somit

$$\begin{aligned} (a)\Psi[u] &= \int sd \{ (\pi_s u, v_1) - (v_2, \pi_s u) \} \\ &= (a u, v_1) - (v_2, a u) \end{aligned}$$

Andererseits ist auch

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(e^{i a s} u, v_1) + (v_2, e^{i a s} u) - (u, v_1) - (v_2, u)}{s} \\ = (a u, v_1) - (v_2, a u) \end{aligned}$$

und damit ist (18) für den Fall der Ladungsquantelung auf dem Ring der Zustände R bewiesen. Analog geht man bei der Anzahlquantelung vor.

Die Darstellung (18) hat zwei Vorteile: Einmal braucht man bei ihr die Zerlegung der Einheit von a nicht zu kennen. Zum anderen aber ist (18) ohne weiteres auf nicht-selbstadjungierte Operatoren übertragbar. Wir denken uns in Zukunft die Operatoren $[a]$ und (a) durch die Formel (18) für beliebige lineare Operatoren a aus \mathfrak{B} erklärt.

Mit dieser Vereinbarung ist z. B.

$$(a) = \frac{1}{i} [i a]. \quad (19)$$

Dies gestattet uns, in einer Reihe von Formeln und Aussagen nur die Anzahlquantelung zu behandeln, da das Entsprechende für die Ladungsquantelung mittels (19) erhalten werden kann.

Eine andere Folge der Definition (18) ist

$$[a]C = C[a], \quad (a)C + C(a) = 0. \quad (20)$$

Wir geben nun den erhaltenen Resultaten noch eine andere Wendung:

Auf R ist der Operator $[a]$ durch folgende Eigenschaften eindeutig bestimmt:

- 1) $[a]$ ist ein Ableitungsoperator.
- 2) Ist

$$\Psi[u] = (u, v_1) + (v_2, u),$$

so ist

$$[a]\Psi = (a u, v_1) + (v_2, a u).$$

Seien nun a, b zwei lineare Operatoren von \mathfrak{B} und r, s reelle Zahlen. Wir sehen, daß die Ableitungsoperatoren

$r[a] + s[b]$ und $[ra + sb]$ für die unter 2) genannten Funktionen zusammenfallen. Folglich ist

$$[ra + sb] = r[a] + s[b]. \quad (21a)$$

Bezeichnet a^* den zu a adjungierten Operator, so ist für die unter 2) genannten Funktionen Ψ :

$$[ab]\Psi = (abu, v_1) + (v_2, abu) = (bu, a^*v_1) + (a^*v_2, bu) = [b] \{ (u, a^*v_1) + (a^*v_2, u) \}.$$

Andererseits ist

$$[a]\Psi = (au, v_1) + (v_2, au) = (u, a^*v_1) + a^*v_2, u).$$

Also gilt für die reellen Linearformen Ψ über \mathfrak{R} :

$$[ab]\Psi = [b][a]\Psi.$$

Es folgt für die genannten Ψ bei Berücksichtigung von (21a)

$$[ab - ba]\Psi = \{ [b][a] - [a][b] \} \Psi. \quad (21b)$$

Hier steht vor Ψ nicht nur auf der linken Seite ein Ableitungsoperator, sondern nach Nr. 3 auch rechts. Also gilt (21b) auf ganz R .

5. Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren

Sei $v \in \mathfrak{R}$ beliebig. Die zur Transformationsgruppe

$$\Psi[u] \rightarrow \Psi[u + sv]$$

gehörende infinitesimale Transformation

$$\frac{\partial}{\partial v} \Psi[u] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Psi[u + sv] - \Psi[u]}{s} \quad (22)$$

ist ein Ableitungsoperator.

Aus der Definition folgt, wenn v_1, v_2 weitere feste Elemente aus \mathfrak{R} sind,

$$\frac{\partial}{\partial v} (u, v_1) = (v, v_1), \quad \frac{\partial}{\partial v} (v_2, u) = (v_2, v). \quad (23)$$

Wir können hiermit die Relationen

$$\frac{\partial}{\partial (r_1 v_1 + r_2 v_2)} = r_1 \frac{\partial}{\partial v_1} + r_2 \frac{\partial}{\partial v_2} \quad r_1, r_2 \text{ reell} \quad (24a)$$

$$\frac{\partial}{\partial v_1} \frac{\partial}{\partial v_2} - \frac{\partial}{\partial v_2} \frac{\partial}{\partial v_1} = 0 \quad (24b)$$

sofort für Linearformen bestätigen. Da es sich aber um Ableitungsoperatoren handelt, sind sie auf ganz R gleich. Desselben Arguments bedient man sich, um

$$\frac{\partial}{\partial v} [a] - [a] \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial av} \quad (25)$$

zu beweisen: Beide Seiten ergeben bei Anwendung auf die Linearform $(u, v_1) + (v_2, u)$ das Resultat $(av, v_1) + (v_2, av)$.

Eine direkte Folge der Definition (22) ist schließlich

$$C \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} C. \quad (26)$$

Wir suchen nun nach denjenigen Ableitungsoperatoren D_v^+ und D_v^- für die

$$D_v^+(u, v_1) = (v, v_1); \quad D_v^-(u, v_1) = 0; \\ D_v^+(v_2, u) = 0; \quad D_v^-(v_2, u) = (v_2, v) \quad (27a)$$

ist. Es ist

$$\left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial v} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial iv} \right) \{ (u, v_1) + (v_2, u) \} = \\ (\alpha_1 + i\alpha_2) (v, v_1) + (\alpha_1 - i\alpha_2) (v_2, v)$$

und hieraus bestimmt man die gewünschten Operatoren zu

$$D_v^+ = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial v} - i \frac{\partial}{\partial iv} \right); \quad D_v^- = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial v} + i \frac{\partial}{\partial iv} \right). \quad (27b)$$

Hieraus folgt

$$D_{iv}^+ = i D_v^+; \quad D_{iv}^- = -i D_v^-$$

weshalb mit (24a) die Beziehung

$$D_{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2}^+ = \alpha_1 D_{v_1}^+ + \alpha_2 D_{v_2}^+; \\ D_{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2}^- = \bar{\alpha}_1 D_{v_1}^- + \bar{\alpha}_2 D_{v_2}^- \quad (28)$$

mit beliebigen komplexen α_1, α_2 folgt.

Aus den Formeln (25) und (26) folgen die Beziehungen

$$D_{v_1}^\pm D_{v_2}^\pm = D_{v_2}^\pm D_{v_1}^\pm; \quad D_{v_1}^+ D_{v_2}^- = D_{v_2}^- D_{v_1}^+ \quad (29)$$

und

$$D_v^\pm [a] - [a] D_v^\pm = D_{av}^\pm. \quad (30)$$

Die Anwendung von (19) und (28) auf (30) ergibt

$$D_v^\pm (a) - (a) D_v^\pm = \pm D_{av}^\pm. \quad (30a)$$

(30) und (30a) zeigen, daß die Operatoren (27) Vernichtungsoperatoren sind. Sei z. B. Ψ eine Eigenfunktion von N und Q

$$N\Psi = n\Psi, \quad Q\Psi = m\Psi. \quad (x)$$

Aus (30) und (30a) folgen unter Berücksichtigung von (16) die Formeln

$$D_v^\pm N - N D_v^\pm = D_v^\pm, \\ D_v^\pm Q - Q D_v^\pm = \pm D_v^\pm,$$

die wir auf Ψ anwenden. Unter Berücksichtigung von (x) erhalten wir

$$N (D_v^\pm \Psi) = (n - 1) D_v^\pm \Psi, \\ Q (D_v^\pm \Psi) = (m \mp 1) D_v^\pm \Psi.$$

Aus der ersten dieser Formeln folgt, daß D_v^\pm den n -Teilchenzustand Ψ in einen Zustand mit $(n - 1)$ Teilchen verwandelt. Die zweite Formel sagt aus, daß sich im Falle D_v^+ die Gesamtladung um eine Einheit verringert – das vernichtete Teilchen also positiv geladen war. Im Falle D_v^- zeigt sich, daß die Gesamtladung sich um eine Einheit vermehrt. D_v^- also ein Vernichtungsoperator für ein negatives Teilchen ist.

Da $[a]$ und (a) Ableitungsoperatoren sind, können die folgenden Formeln sofort nachgerechnet werden:

$$\begin{aligned}
[a](u, v) - (u, v)[a] &= (au, v), \\
[a](v, u) - (v, u)[a] &= (v, au), \\
(a)(u, v) - (u, v)(a) &= (au, v), \\
(a)(v, u) - (v, u)(a) &= -(v, au).
\end{aligned} \tag{31}$$

Diese zu (30) und (30a) analogen Formeln zeigen durch ähnliche Schlüsse wie unter (30) und (30a), daß die Multiplikation mit (u, v) bzw. (v, u) die Wirkung eines Erzeugungsoperators hat.

Und zwar erzeugt (u, v) ein positives und (v, u) ein negatives Teilchen.

Dieser Zusammenhang wird noch deutlicher, wenn man mit Hilfe von (27a) und der Tatsache, daß die Vernichtungsoperatoren Ableitungsoperatoren sind, die Formeln

$$\begin{aligned}
D_{v_1}^+(u, v_2) - (u, v_2)D_{v_1}^+ &= (v_1, v_2), \\
D_{v_1}^+(v_2, u) - (v_2, u)D_{v_1}^+ &= 0, \\
D_{v_1}^-(u, v_2) - (u, v_2)D_{v_1}^- &= 0, \\
D_{v_1}^-(v_2, u) - (v_2, u)D_{v_1}^- &= (v_2, v_1)
\end{aligned} \tag{32}$$

herleitet, die gerade den bekannten Vertauschungsrelationen zwischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren entsprechen. Wegen (26) und (27b) lauten die Vertauschungsregeln mit dem Umladungsoperator C :

$$D_v^+ C = C D_v^-; (u, v) C = C (v, u). \tag{33}$$

Wir geben nun die Wirkung von Vernichtungsoperatoren auf einige Funktionen an. Zunächst rechnet man ohne Schwierigkeiten

$$\begin{aligned}
D_{v_1}^+ D_{v_2}^+ \dots D_{v_r}^+ (u, w_1) (u, w_2) \dots (u, w_r) \\
= \sum_{(k_1, \dots, k_r)} (v_{k_1}, w_1) (v_{k_2}, w_2) \dots (v_{k_r}, w_r)
\end{aligned} \tag{34a}$$

aus, wobei (k_1, \dots, k_r) andeuten soll, daß über alle Permutationen k_1, \dots, k_r der Zahlen 1 bis r zu summieren ist.

Durch Anwendung von Operator C erhält man das Analogon für die D_v^- . Des weiteren betrachten wir Funktionen, die nicht in R liegen. Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial v} (u, au) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(u + sv, au + sav) - (u, u)}{s} \\
&= (u, av) + (v, au)
\end{aligned}$$

für einen beliebigen linearen Operator a von \mathfrak{B} . Deshalb ergibt sich

$$D_v^+ (u, au) = (v, au); D_v^- (u, au) = (u, av). \tag{34b}$$

Aus der für einen beliebigen Ableitungsoperator A gültigen Formel

$$A e^\Psi = e^\Psi \cdot A \Psi \tag{xx}$$

gewinnt man

$$\begin{aligned}
D_v^+ e^{(u, v_1) + (v_2, u)} &= (v, v_1) e^{(u, v_1) + (v_2, u)}, \\
D_v^- e^{(u, v_1) + (v_2, u)} &= (v_2, v) e^{(u, v_1) + (v_2, u)}.
\end{aligned} \tag{34c}$$

Sie besagen, daß die angegebenen Exponentialfunktionen ein simultanes System von Eigenfunktionen der Vernichtungsoperatoren sind.

Wiederholtes Anwenden von (34c) ergibt weiter die Formel

$$\begin{aligned}
e^{D_{v_1}^+ + D_{v_2}^-} e^{(u, v_1) + (v_2, u)} \\
= e^{(u_1, v_1) + (v_2, u_2)} \cdot e^{(u, v_1) + (v_2, u)}.
\end{aligned} \tag{34d}$$

Betrachten wir schließlich die „1. Hermitesche Funktion“. Aus (34b) und (xx) folgt

$$\{D_v^+ + (v, u)\} e^{-(u, u)} = 0; \quad \{D_v^- + (v, u)\} e^{-(u, u)} = 0. \tag{34e}$$

Diese Formel kann als Ausgangspunkt für die Einführung Hermitescher Funktionen auf \mathfrak{B} dienen. Doch soll dieses Problem in dieser Arbeit nicht behandelt werden.

6. Das Skalarprodukt

Wir geben zunächst eine weitere Darstellung für den Operator $[a]$. Sei v_1, v_2, \dots ein vollständiges Orthonormalsystem von \mathfrak{B} . Dann ist

$$\begin{aligned}
[a] &= \sum_{k, l} (u, v_k) (a v_k, v_l) D_{v_l}^+ \\
&+ \sum_{k, l} (v_k, u) (v_l, a v_k) D_{v_l}^-.
\end{aligned} \tag{35}$$

Wir vergewissern uns, daß jedes Glied der rechts stehenden Summen ein Ableitungsoperator ist (nach einer Bemerkung in Nr.3). Deshalb ist die gesamte in (35) rechts stehende Summe ein Ableitungsoperator. Zur Bestätigung von (35) braucht man diese Formel lediglich noch auf die Funktion $(u, v_1) + (v_2, u)$ anzuwenden. Mittels (27a) bestätigt man jedoch die Richtigkeit von (35) sofort.

Wir versuchen nun, in R ein Skalarprodukt

$$\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle, \quad \Psi_k \in R \tag{36a}$$

so einzuführen, daß für jeden linearen Operator a von \mathfrak{B}

$$\langle [a] \Psi_1, \Psi_2 \rangle = \langle \Psi_1, [a^*] \Psi_2 \rangle \tag{36b}$$

erfüllt ist. Bezeichnet also A^* den zu A bezüglich (36a) adjungierten Operator, so soll stets

$$[a]^* = [a^*] \quad \text{bzw.} \quad [a] = [a^*]^* \tag{37}$$

sein. Aus (19) folgt dann, daß mit (37) auch

$$(a)^* = (a)^* \tag{37a}$$

erfüllt ist. Suchen wir nun (37) zu erfüllen. Wir wenden (37) auf die Formel (35a) an. Wegen $(a^* v_k, v_l) = (a v_l, v_k)$ ist

$$\begin{aligned}
\sum (u, v_k) (a v_k, v_l) D_{v_l}^+ + \sum (v_k, u) (v_l, a v_k) D_{v_l}^- \\
= \sum (D_{v_l}^+)^* (a v_k, v_k)^* + \sum (D_{v_l}^-)^* (v_k, a v_l) (v_k, u)^*.
\end{aligned}$$

Wir schließen hieraus

$$(u, v_l)^* = D_{v_l}^+, \quad (v_l, u)^* = D_{v_l}^-. \tag{38}$$

Durch Formel (37) bzw. der damit äquivalenten (38) ist das gesuchte Skalarprodukt (36a) vollständig bestimmt, wenn man noch eine Vereinbarung über seine „Normierung“ trifft. Wir fordern

$$\langle 1, 1 \rangle = 1 \tag{38a}$$

das heißt die auf \mathfrak{B} konstante Zustandsfunktion 1 soll

die Norm 1 haben. Um das Skalarprodukt (36 a) mit (38) und (38a) zu bestimmen, definieren wir die Abbildung σ , die jeder Zustandsfunktion $\Psi[u] \in R$ einen auf die Elemente von R wirkenden linearen Operator Ψ^σ zuordnet. σ ist durch folgende Forderungen eindeutig bestimmt:

$$(\alpha_1 \Psi_1 + \alpha_2 \Psi_2)^\sigma = \alpha_1 \Psi_1^\sigma + \alpha_2 \Psi_2^\sigma, \quad (\Psi_1 \Psi_2)^\sigma = \Psi_1^\sigma \Psi_2^\sigma, \\ (u, v)^\sigma = D_v^-, \quad (v, u)^\sigma = D_v^+. \quad (39)$$

Diese Abbildung σ existiert, da die Vernichtungsoperatoren miteinander vertauschbar sind, und weil folgender Sachverhalt vorliegt: Endlich viele Linearformen sind entweder über die Beziehungen

$$(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, u) = \alpha_1 (v_1, u) + \alpha_2 (v_2, u), \\ (u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \bar{\alpha}_1 (u, v_1) + \bar{\alpha}_2 (u, v_2).$$

abhängig oder aber algebraisch unabhängig. Diese Beziehungen gehen aber unter σ genau in die Relationen (28) über.

Nun beachten wir, daß man jedes $\Psi \in R$ als Multiplikationsoperator auffassen kann. Der Übergang: Multiplikationsoperator $\Psi \rightarrow \Psi^*$ ist aber durch folgende Gesetze eindeutig bestimmt:

$$(\alpha_1 \Psi_1 + \alpha_2 \Psi_2)^* = \bar{\alpha}_1 \Psi_1^* + \bar{\alpha}_2 \Psi_2^*, \quad (40) \\ (\Psi_1 \Psi_2)^* = \Psi_1^* \cdot \Psi_2^*, \quad (u, v)^* = D_v^+, \quad (v, u)^* = D_v^-.$$

Hierbei wurde von (38) Gebrauch gemacht. Nach (39) und (33) befolgt aber die Abbildung

$$\Psi \rightarrow C \Psi^\sigma C$$

alle in (40) angegebenen Relationen, und somit muß

$$\Psi^* = C \Psi^\sigma C \quad (41)$$

sein.

Damit wird

$$\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle = \langle \Psi_3, 1 \rangle; \quad \Psi_3 = C \Psi_2^\sigma C \Psi_1. \quad (42)$$

Endlich ist

$$\langle \Psi, 1 \rangle = \Psi [0] \quad (42a)$$

(„Vakuumteil“ von Ψ), wobei 0 die Null von \mathfrak{B} ist. (42a) ergibt sich wie folgt: Es ist mit gewissen $\Psi_k, \Phi_k \in R$

$$\Psi = \Psi [0] + \sum (u, v_k) \Psi_k + \sum (w_k, u) \Phi_k.$$

Also gilt nach (40)

$$\langle \Psi, 1 \rangle = \langle \Psi [0], 1 \rangle + \sum \langle 1, \Psi_k^* D_k^+ 1 \rangle \\ + \sum \langle 1, \Phi_k^* D_k^- 1 \rangle.$$

Aber $D_v^+ 1 = D_v^- 1 = 0$ und deshalb

$$\langle \Psi, 1 \rangle = \langle \Psi [0], 1 \rangle = \Psi [0] \cdot \langle 1, 1 \rangle = \Psi [0]$$

nach (38a).

Durch die Formel (34a) wird wegen (40) gerade

$$\langle (u, v_1) \dots (u, v_r) \cdot (u, w_1) \dots (u, w_r) \rangle$$

ausgerechnet. Ist weiter v_1, v_2, \dots ein vollständiges Orthornormalsystem von \mathfrak{B} , so läßt sich jedes Element aus R durch Linearkombinationen der Elemente

$$\sqrt{\frac{1}{m_1! \dots m_r! n_1! \dots n_s!}} (u, v_1)^{m_1} \dots (u, v_r)^{m_r} (v_1, u)^{n_1} \dots \\ (v_s, u)^{n_s} \quad (43)$$

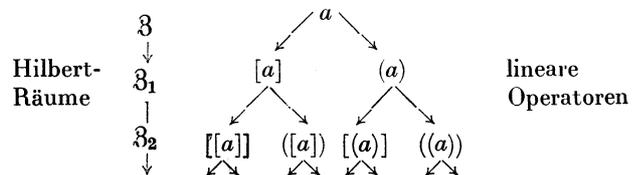
wobei r, s, m_k, n_j nichtnegative ganze Zahlen sind, approximieren. Nach Streichung der mehrfach auftretenden Funktionen bildet (43) ein vollständiges Orthornormalsystem von R . R wird also durch die Einführung des Skalarprodukts zu einem unvollständigen Hilbert-Raum. Ist \bar{R} seine Vervollständigung, so lehrt (34d), daß

$$e^{(u, v_1) + (v_2, u)} \in \bar{R} \text{ mit} \quad (44)$$

$$\langle e^{(u, v_1) + (v_2, u)}, e^{(u, w_1) + (w_2, u)} \rangle = e^{(w_1, v_1) + (w_2, v_2)}.$$

7. Abschließende Bemerkungen

A. Wir gingen aus von einem Hilbert-Raum \mathfrak{B} . Der Prozeß der zweiten Quantelung führte auf Funktionen, die auf \mathfrak{B} definiert sind. Unter diesen ist eine Menge ausgezeichnet, die hier \bar{R} genannt wurde und wieder ein Hilbert-Raum ist. Setzen wir $\mathfrak{B}_1 = \bar{R}$. Nichts hindert uns, den Prozeß $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}_1$ zu wiederholen mit \mathfrak{B}_1 als Ausgangsraum. Wir kommen dann etwa zu \mathfrak{B}_2 usw. Allgemein kann also der Prozeß „zweite Quantelung“ mehrfach ausgeführt werden. Es ergibt sich das Schema.



Ob eine solche „mehrfache“ Quantelung physikalisch sinnvoll ist, bleibt dahingestellt.

B) Wie schon in Nr.1 betont, ist das angegebene Verfahren nur bei Bose-Statistik möglich. Um Fermi-Teilchen zu beschreiben, müssen andere dem Raum der Zustände \mathfrak{B} zugeordnete mathematische Objekte benutzt werden. Die allgemeine Situation ist wie folgt:

Die alternierenden Differentiale auf \mathfrak{B} beschreiben Zustände, die Bosonen und Fermionen gleichzeitig enthalten. Dieselben Transformationsgruppen, die zur Anzahl- und Ladungsquantelung eines linearen Operators von \mathfrak{B} führen, leisten dasselbe für den allgemeinen Bereich der äußeren Differentiale. Unter anderem gehört der in Analogie zu (3) definierte Anzahloperator N zur Gesamtteilchenzahl. Jedoch gehört die Gruppe $\rightarrow u + s v$, die zur Definition der Vernichtungsoperatoren führte, nur zu den Bosonen. Entsprechend führt die Formel (35) für $a =$ Identität zu einem Anzahloperator

$$N_B = \sum_K (u, v_k) D_{v_k}^+ + \sum (v_k, u) D_{v_k}^-$$

der zur Anzahl der Bosonen gehört, und es ist

$$N = N_B + N_F.$$

Das heißt die Differentiale Θ mit $N_B \Theta = 0$ charakterisieren Zustände, die nur Fermionen enthalten. Der allgemeine Fall, das gleichzeitige Vorhandensein von Bose- und Fermi-Teilchen, soll in einer weiteren Arbeit behandelt werden.