Leibniz–Online
3/2007

www.ls-journal.de

ISSN 1863-3285

Armin Uhlmann

Zwischen Ordnung und Unordnung

Meist strebt man danach, die Dinge gut zu ordnen und sieht doch oft genug die Vergeblichkeit dieses löblichen Bemühens. Es ist dann angemessen, die Vorstellung des wohl Geordneten zugunsten eines weniger rigiden Begriffs "aufzuweichen". Es ist der Begriff der teilweisen (partiellen) Ordnung, also der der Halbordnung. Er eröffnet den Blick auf eine erstaunliche, kaum überblickbare Fülle von Strukturen, denen die Mathematiker einige wenige strenge Regeln auferlegt haben.

Das Folgende handelt von *einer* solchen Halbordnung und einigen ihrer Varianten. Mit ihr kann man sich zum Beispiel der Frage nähern: "Wie steil ist ein Berg oder ein Gebirge?" Zu diesem Zweck stellen wir uns einen Schnitt des Berges mit einer horizontalen Ebene vor. Sei h die Höhe der Ebene und sei $V(h)$ das Volumen desjenigen Teils des Berges, das oberhalb besagter Ebene liegt.
Wir können jetzt, noch provisorisch, zwei Berge als gleich steil ansehen, wenn für jede beliebige Höhe h beide Berge das gleiche Volumen $V(h)$ an Gestein oberhalb dieser Höhe aufweisen. Es ist jetzt nur noch ein kleiner Schritt, den Berg Nummer 1 als steiler als den Berg Nummer 2 zu definieren, wenn für jede Höhe $V_1(h) \geq V_2(h)$ gilt. Allerdings vergleicht diese Halbordnung Gebirge verschiedener Mächtigkeit. Das aber ist der Frage nach der Steilheit eines Gebirges nicht angemessen.

Unsere Halbordnung wird strenger und zur *Majorisierung*, wenn die zu vergleichenden Berge gleiches Gesamtvolumen besitzen oder, besser, wenn man unter V das spezifische Volumen, (Volumen oberhalb h geteilt durch das Gesamtvolumen), versteht. Durch letzteren Trick können wir die Normierung $\lim V(h) = 0$ falls $h \to \infty$ neben $V(0) = 1$ für alle Berge erreichen. Wir wollen weiter vereinfachend annehmen, dass die Berge auf einem endlichen Teil der $(h = 0)$-Ebene ruhen. An ihr Profil werden nur wenige Forderungen gestellt, sodass zwischen "Berg" und "Gebirge" nicht unterschieden werden muss. Das Profil muss nicht stetig, darf aber auch nicht ganz willkürlich sein.

Man sieht den Preis, den man für eine Halbordnung zahlt: Nicht von jedem Paar Berge kann man behaupten, einer von beiden sei steiler. Die meisten solcher Paare sind in unserer Halbordnung *unvergleichbar, inkompatibel.* Man sieht aber auch, dass man, etwa durch Mittelungen über kleine Höhenunterschiede, eine etwas gröbere Halbordung des gleichen Typs erhalten kann, bei dem wesentlich mehr Paare kompatibel werden.

Wird Gestein ohne Volumenverlust von einer Stelle zu einer anderen transportiert, so sprechen wir von einer *Umlagerung* ("rearrangement"). Bei einer *ausgleichenden Umlagerung* darf Gestein nie von unten nach oben transportiert werden. Wir haben es also mit einem strengen Ausgleichsvorgang zu tun: Sisyphus hat Arbeitsverbot.

Wie auch immer eine ausgleichende Umlagerung durchgeführt wird, für keine Höhe h kann der Wert $V(h)$ als Folge dieser Operation anwachsen. Und umgekehrt, gilt $V_1(h) \geq V_2(h)$ für zwei Berge, so können wir durch eine Folge von ausgleichenden Umlagerungen den Berg Nummer 1 so verändern, dass er zum Berg Nummer 2 wird.

Selbstverständlich bieten "Berge" nur ein Beispiel, ein typisches Bild, für Majorisierung und den mit ihr verbundenen ausgleichenden Umlagerungen. Analoga sind Temperaturverteilungen, Druckverteilungen in kommunizierenden Röhren, Spannungen in Netzwerken ohne Induktion (nur Widerstände und Kapazitäten) und ihre Ausgleichsprozesse.

Problem 1: *Stetige Ausgleichsvorgänge.* Um im obigen Bild zu bleiben, kann man das Temperaturprofil z. B. eines isolierten homogenen Stabes mit der Kontur eines Berges Identifizieren. Beim Temperaturausgleich fließt Wärme nie von allein in Gebiete höherer Temperatur. Man findet daher, dass Temperaturausgleich ein Beispiel für Majorisierung, also für unsere Halbordung, abgibt. Da der Wärmefluss durch Differentialgleichungen beschrieben werden kann, besitzt er noch eine wichtige zusätzliche Eigenheit: Ein Temperaturprofil wird nicht nur ausgleichend, sondern auch *stetig* geändert. (Stetige

Deformationen müssen nicht notwendig durch eine Differentialgleichung vom Wärmeleitungstyp beschrieben werden.) Die Frage, welche Temperaturprofile aus einem anfänglich gegebenen entstehen können, ist ausgesprochen schwierig. Sie begründet eine neue, von der von der oben beschriebenen Majorisierung deutlich verschiedene und strengere Halbordnung. Siehe hierzu den Beitrag von Ch. Zylka, der auch einige der offenen Fragen benennt.•

Kehren wir jetzt wieder zur Majorisierung zurück und betrachten wir den gut bekannten Fall endlicher Verteilungen. Er kann als Halbordnung zwischen Wahrscheinlichkeitsverteilungen verstanden werden.
Die nicht negativen Zahlen $p_1, \ldots, p_n$ bilden einen Wahscheinlichkeitsvektor, wenn sie sich zu 1 aufsummieren. Um im Bild zu bleiben, nennen wir ihn weiterhin V. Teilen wir nun das Einheitsintervall in n gleiche Teile und ziehen wir über dem k-ten in der Höhe p_k ein Geradenstück. So wird unser Gebirge V zum Blockdiagramm und die oben eingeführte Funktion $V(h)$ ist die Summe aller Zahlen $p_j - h$ für die $p_j > h$ gilt.

Das Kriterium $V_1(h) \geq V_2(h)$ für Majorisierung kann einer Legendre-Transformation unterzogen werden. Es entstehen Funktionen $e_s(V)$, die in unserem Berg-Modell so gedeutet werden können: Wir schneiden aus dem Berg Säulen aus, deren Grundfläche den Inhalt s hat. e_s ist die kleinste obere Schranke für die Volumina aller dieser Säulen. Man kann zeigen, dass e_s die lineare Interpolation der

$$e_m(V) = \text{ Summe der } m \text{ größten } p_j$$

ist. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen V_1 majorisiert V_2 genau dann, wenn $e_m(V_1) \geq e_m(V_2)$ für $m = 1, \ldots, n-1$ und $e_n(V_1) = e_n(V_2)$ richtig ist. Dieses Kriterium wird oft zur Definition der auf Majorisierung basierenden Halbordnung genutzt. Beide Kriterien liefern Brücken zur konvexen Analysis. Doch würde ihre Erörterung den Rahmen sprengen. Nun wollen wir uns ein weiteres, noch nicht hinreichend ausgeleuchtetes Problem ansehen.

Problem 2: *Katalytische Majorisierung.* Seien V und W zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen gleicher Länge und X eine weitere mit beliebiger Länge. Sie mögen durch die Zahlen p_j, q_j und x_k definiert sein. Nennen wir nun VX die aus den Zahlen $p_j x_k$ bestehende Verteilung. Analog bilden wir WX. Majorisiert V den Wahscheinlichkeitsvektor W, so wird WX von VX majorisiert.

Was aber kann man sagen, wenn V und W unvergleichbar sind? D. Jonathan und M. P. Plenio haben 1999 Beispiele gefunden, bei dem WX von VX majorisiert wird, aber W und V unvergleichbar sind. Man sagt dann,

V *übertrumpfe* W. Zu dieser *katalytischen Majorisierung* hat es zahlreiche Untersuchungen gegeben. Ein handhabbares Verfahren, das entscheidet, ob W von V übertrumpft wird, ist nicht bekannt.

Jedoch sind in den letzten Jahren bedeutende Fortschritte erzielt worden. Systematische Studien verdankt man S. K. Daftuar und M. Klimesh. Eine entscheidente Beweisidee fand G. Kuperberg bei der Untersuchung hybrider Formen der klassischen und quantalen Speicherung von Information. Im Folgenden betrachten wir jede Verteilung V als unendlich lang, aber mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Einträgen.

Wird W von V katalytisch majorisiert, so sind die Renyi-Entropien von W nicht größer als die mit V gebildeten. Das is eine leicht zu zeigende Folgerung. Die Umkehrung dieser Behauptung ist falsch. Übersteigt jede Renyi-Entropie von V diejenige von W, so wollen wir sagen, W sei *Renyi–gemischter* als V. Es gilt:
Genau dann ist W Renyi–gemischter als V, wenn es eine Folge von Verteilungen W_j gibt, die gegen W konvergiert (im Sinne der 1-Norm) und bei der jedes W_j von V übertrumpft wird.
Bei dieser Annäherung kann die Zahl der von Null verschiedenen Einträge von W_j mit j unbeschränkt anwachsen.•

Die katalytische Majorisierung besitzt in der Quanteninformatik einen festen Platz. Die generelle Verbindung von Majorisierung und Quantenphysik wurde vor fast 40 Jahren in Leipzig begonnen. Quantenphysikalisch können die Zustände eines Systems (mit endlich vielen Freiheitsgraden) durch Dichte-Operatoren beschrieben werden. Es sind positive Operatoren mit Spur Eins. Ihre Eigenwerte sind Wahrscheinlichkeitsvektoren. Letztere können der Theorie der Majorisierung unterworfen werden. In diesem Zusammenhang nennt man den Zustand ω *gemischter* als den Zustand ρ, wenn das Spektrum von ω vom Spektrum von ρ majorisiert wird. Die Relation "gemischter als" wurde von W. Thirring gelegentlich auch "weniger rein als" und von E. Lieb "chaotischer als" genannt. Das Interesse an dieser Halbordung erklärt sich u.a. aus aus der Tatsache, dass ω genau dann gemischter als ρ ist, wenn sich ω als Gibbs'sche Mischung (d. h. als konvexe Linearkombination) von zu ρ unitär äquivalenten Zuständen schreiben lässt.

Die Symmetrien diskreter Verteilungen sind Permutationen. Im Quantenphysikalischen haben wir es mit unitären und anti-unitären Transformationen zu tun. Das wirft zwangsläufig weitere Fragen auf:

Problem 3: *Symmetrie und Halbordnung.* Sei G eine Gruppe, deren Elemente unitäre und eventuell auch anti-unitäre Operatoren sind. Ein Zustand ω heißt *G-gemischter* als ρ, wenn ω eine konvexe Kombination von Dichte-Operatoren $U\rho U^{-1}$ mit $U \in G$ ist. Wie aber sieht man es einem Dichte-Operator an, dass er G-gemischter ist als ein anderer? Das ist, abgesehen von der Permutationsgruppe und der vollen unitären Gruppe eine weitgehend offene Frage. Selbst dann, wenn G das direkte Produkt zweier unitärer Untergruppen einer vollen unitären Gruppe ist, fehlen schlüssige Kriterien. Bemerken wir noch, dass die Relation "gemischter als" auch mit Hilfe von Abbildungen, den *bistochastischen Quantenkanälen,* definiert werden kann. Indem man andere, einer Aufgabe angepasste Klassen von Abbildungen zugrunde legt, können weitere Beispiele von Halbordnungen erschlossen werden.•

Einen Überblick zum Zusammenhang zwischen Halbordnung und Irreversibilität findet sich in ([**?**]).

Literatur

[1] A. Uhlmann: Sätze über Dichtematrizen. *Wiss. Z. Karl-Marx-Univ. Leipzig, Math.-Nat. R.*, 20:633–637, 1971.

[2] A. Uhlmann: Zur Beschreibung irreversibler Quantenprozesse. *Sizungsber. AdW DDR*, 14 N:1–25, 1976.

[3] E. Ruch, A. Mead: The Principle of Increasing Mixing Character and Some of Its Consequences, *Theoret. Chim. Acta* 41, 95 (1976)

[4] A. W. Marshall and I. Olkin: *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications.* Academic Press, New York, 1979.

[5] P. Alberti and A. Uhlmann: *Dissipative Motion in State Spaces*, volume 33 of *Teubner-Texte zur Mathematik.* Teubner Verlag, Leipzig, 1981.

[6] P. Alberti and A. Uhlmann: *Stochasticity and Partial Order – Doubly Stochastic Maps and Unitary Mixing*, volume 9 of *Mathematics and its Applications.* D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht, Boston, London, 1982. Auch: Dtsch. Verl. Wissensch., Berlin 1981.

[7] B. Crell: Dissipative systems. *Suppl. Rend. Circ. Mat. di Palermo*, Serie II (6): 75 , 1984.

[8] D. Jonathan and M. P. Plenio: Entanglement-assisted local manipulation of pure quantum states. *Phys. Rev. Lett.,* 83, 3566 (1999)

[9] W. Thirring: *Lehrbuch der mathematischen Physik*, volume IV: Quantenmechanik großer Systeme. Springer-Verlag, Wien, New York, 1980. (2nd english edition 2002)

[10] M. A. Nielsen, I. L. Chuang: *Quantum Computation and Quantum Information.* Cambridge University Press 2000

[11] S. K. Daftuar, M. Klimesh: Mathematical structure of entanglement catalysis. *Phys. Rev.,* A 64, 042314 (2001)

[12] G. Kuperberg: The capacity of hybrid quantum memory. *IEEE Trans. Inf. Theory,* 49, 1465 (2003)

[13] Ch. Zylka: Über eine neue Halbordnung. *Leibniz-Online,* dieses Heft.

[14] P. M. Alberti, B. Crell, A. Uhlmann, Ch. Zylka. Order Structure (Majorization) and Irreversible Processes. *to appear*

Anschrift des Verfassers: armin.uhlmann@physik.uni-leipzig.de