Störungstheoretische Renormierung Quantisierung von Eichtheorien

KLAUS SIBOLD Max-Planck-Institut für Physik Werner-Heisenberg-Institut München

VORWORT

Das vorliegende Skriptum ist aus Vorlesungen entstanden, die ich an der TU München und der Universität Hannover gehalten habe. Für die Einladung, in Hannover vorzutragen, bin ich Norbert Dragon zu Dank verpflichtet. Auf seine kritischen Kommentare während der Vorlesung geht auch eine ganze Anzahl von Straffungen und Präzisierungen des Textes zurück. Einen Brauchbarkeitstest hat letzterer anläßlich eines Doktorandenseminars am MPI für Physik durchlaufen. Seinen Teilnehmern gebührt für Korrekturen und Ergänzungen große Anerkennung. Hilfreich war mir ein nicht-publiziertes Vorlesungsmanuskript von Peter Breitenlohner, dem ich auch für zahlreiche Diskussionen dankbar bin. Ganz besonderen Dank schulde ich jedoch Elisabeth Kraus, die Inhalt und Aufbau des Skriptums mit konstruktiver Kritik ganz wesentlich mitgestaltet hat. Um den T_EX-Satz haben sich Wolfgang Mende, vor allem aber Rosita Jurgeleit verdient gemacht. Sie haben ein schwieriges Manuskript in präsentable Form gebracht.

K. Sibold, München, Febr. 1993

Inhaltsverzeichnis

Ι	\mathbf{St}	örungstheorie einfacher Modelle	1
1	Die	Quantisierung freier Felder	3
	1.1	Das skalare Feld	3
		1.1.1 Kanonische Quantisierung	3
		1.1.2 Die invarianten Greenschen Funktionen	7
	1.2	Spin $1/2$	11
		1.2.1 Dirac-Spinoren	11
		1.2.2 Wevl-Spinoren	18
		1.2.3 Majorana-Spinoren	20
	1.3	Das elektromagnetische Feld	21
	1.4	Das erzeugende Funktional für die freien	
		Greenschen Funktionen	28
	1.5	Bibliographische Angaben	32
2	Wee	chselwirkung	33
	2.1	Die S-Matrix	33
		2.1.1 Definition und allgemeine Betrachtungen	33
		2.1.2 Beispiele	37
	2.2	Hilfsmittel der Berechnung	41
		2.2.1 Das Wicksche Theorem	41
		2.2.2 Das erzeugende Funktional für Greensche Funktionen wech-	
		selwirkender Felder	45
		2.2.3 Feynman-Diagramme	48
	2.3	Z, Z_c, Γ	56
	2.4	LSZ-Reduktionsformalismus	61
	2.5	Bibliographische Angaben	66
3	Reg	gularisierung, Renormierung	67
	3.1	Regularisierungen	67
	3.2	Impulssubtraktionen	68
		3.2.1 Divergenzgrad (für Ultraviolettdivergenzen)	-
		Vorgehen für Ein-Schleifen-Diagramme	68
		3.2.2 Nicht-Überlappende Divergenzen. Impulsfluß	73

INHALTSVERZEICHNIS

		3.2.3 Überlappende Divergenzen. Waldformel	$^{\prime}7$
		3.2.4 Normalprodukte	34
		3.2.5 Divergenzgrade für Infrarotdivergenzen	
		Subtraktionen im masselosen Fall)0
	3.3	Stückelberg, Bogoliubov, Epstein/Glaser)2
		3.3.1 Das Beispiel : φ^2 :)2
		3.3.2 Das Beispiel : φ^r :)8
		3.3.3 Äquivalenz)()
	3.4	Bibliographische Angaben)1
4	Das	Wirkungsprinzip und seine Anwendungen 10	3
	4.1	Die Differentiation nach Parametern)3
		4.1.1 Ein-Schleifen-Näherung. Konvergente Diagramme 10)3
		4.1.2 Ein-Schleifen-Näherung. Divergente Diagramme 10)6
		4.1.3 Höhere Ordnungen)8
	4.2	Differentiation nach Feldern. Bewegungsgleichungen 10)9
		4.2.1 Lineare Feldgleichung)9
		4.2.2 Bilineare Feldgleichung	2
		4.2.3 Nicht-lineare Feldtransformationen	4
	4.3	Symmetrien. Ward-Identitäten	5
		4.3.1 $O(3)$ -Symmetrie	6
		4.3.2 Ein axiales $U(1)$ -Modell: Das σ -Modell	9
		4.3.3 Die Ward-Identität in der QED	24
	4.4	QED: Konsequenzen aus der Ward-Identität 12	29
		4.4.1 Strom- und Ladungsoperator	29
		4.4.2 Unitarität der S-Matrix $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 13$	32
	4.5	Parametrische Differentialgleichungen	3
		4.5.1 Die Callan-Symanzik-Gleichung	3
		4.5.2 Dilatationen \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 14	6
		4.5.3 Die Renormierungsgruppengleichung	2
		4.5.4 Die Lowenstein-Zimmermann-Gleichung 14	4
	4.6	Bibliographische Angaben	6
5	Spo	tane Symmetriebrechung I 14	7
Π	\mathbf{N}	cht-abelsche Eichtransformationen 14	9
6	Nicł	t-abelsche Eichtheorien 15	1
	6.1	Transformationsgesetze, Invarianten	51
	6.2	Ward-Identitäten $\ldots \ldots 15$	j 4
	6.3	Beispiele	6
	6.4	Bibliographische Angaben 16	<i>j</i> 1

iv

7	BR	S-Transformationen und Slavnov-Identität	163
	7.1	BRS-Transformationen	163
		7.1.1 Algebraischer Aspekt	163
		7.1.2 Feldtheoretischer Aspekt	166
	7.2	Die Slavnov-Identität: Klassische Näherung	168
		7.2.1 Herleitung und Eigenschaften	168
		7.2.2 Allgemeine Lösung	172
		7.2.3 Normalform, Normierungsbedingungen	174
	7.3	Die Slavnov-Identität : Höhere Ordnungen	177
		7.3.1 Konsistenzbedingungen	177
		7.3.2 Lösung der Konsistenzbedingungen	181
		7.3.3 Die Anomalie in der Slavnov-Identität	185
	7.4	Bibliographische Angaben	190
8	Spo	ontane Symmetriebrechung II	191
	8.1	Klassische Näherung	191
		8.1.1 Starre Symmetrie	191
		8.1.2 Lokale Symmetrie	196
	8.2	Bibliographische Angaben	198
9	Uni	tarität	199
	9.1	Problem	199
	9.2	Modell	200
		9.2.1 Propagatoren	202
		9.2.2 Kommutatoren	206
		9.2.3 Metrische Struktur des Fockraums, Hilbertraum	209
	9.3	Wechselwirkende Theorie	216
		9.3.1 Klassische Näherung	217
		9.3.2 Höhere Ordnungen	221
	9.4	Bibliographische Angaben	225

EINLEITUNG

Die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes, beschrieben in Arbeiten von Heisenberg, Jordan, Pauli und Dirac Ende der 20er Jahre, ist der Ursprung der relativistischen Quantenfeldtheorie. Störungstheoretisch formuliert zeigt sie sich von Geburt an mit einem Fehler behaftet: sie enthält Divergenzen. Deren Verständnis und Beseitigung hat immer wieder zu tiefgreifendem physikalischem und mathematischem Umdenken geführt und zahlreiche, durchaus unterschiedliche Formulierungen bis hin zur Aufgabe des Feldbegriffs nach sich gezogen. So sind als nächstes auch die Materiefelder quantisiert worden, dann hat man die Quantenelektrodynamik Lorentz-invariant formuliert (Tomonaga, Schwinger) und ist in der Störungstheorie zur kovarianten Beschreibung übergegangen (Dyson). Deren Auswertung in der Gestalt von Feynman-Diagrammen führte zu leicht handhabbaren Rechenregeln und entsprechend zu weiter Verbreitung. Die experimentelle Bestätigung der ersten Resultate dieser noch reichlich formalen renormierten Störungstheorie (Lamb-Shift, g-2) gab nicht nur Anlaß zu weiterer intensiver Anwendung, sondern auch zum Wunsch nach Klärung der Grundlagen und – wenn möglich – Überwindung des störungstheoretischen Aspekts. Hierher gehören die Asymptotenbedingung und Reduktionstechnik (Lehmann, Symanzik, Zimmermann), die Axiomatisierung Wightmans und die Streutheorie von Haag-Ruelle, die letztlich auch zur algebraischen Version der Quantenfeldtheorie (Haag) Anstoß gab. Einen gewissen Höhepunkt und Abschluß erreichten diese Versuche im Programm der konstruktiven Feldtheorie, die begrifflich u.a. auf das Feynmansche Wegintegral zurückgeht. In zwei und drei Raum-Zeit-Dimensionen wurden in aller wünschenswerten mathematischen Strenge Modelle konstruiert, die die Wightmanschen Axiome erfüllen und zeigen, daß die Störungsreihe eine asymptotische Entwicklung der nicht-störungstheoretischen Theorie darstellt. Leider sind in vier Raum-Zeit-Dimensionen bis heute keine entsprechenden Erfolge erzielt worden. Ahnliches gilt für die Formulierung von Quantenfeldtheorien auf Raum-Zeit-Gittern, für die u.a. chirale Fermionen noch ungelöste Probleme bergen. Insgesamt ist man also für phänomenologisch relevante Modelle doch wieder auf renormierte Störungstheorie angewiesen. Letztere schien an ihr natürliches Ende gelangt zu sein, als sie bei der Meson-Nukleon-Theorie der starken Wechselwirkung völlig versagte, erlebte aber mit der Quantenchromodynamik und dem Standard-Modell der elektroschwachen Wechselwirkung eine glänzende Rehabilitierung. Und es ist im Grunde diese Stelle, an der die Vorlesung ansetzt. Einigermaßen streng, aber auf elementarem Niveau werden alle wichtigen Begriffe der renormierten Störungstheorie eingeführt, so daß hiermit die Quantisierung von Eichtheorien bewältigbar ist. Das Augenmerk ist dabei weniger auf irgendeine Art von Vollständigkeit gerichtet als vielmehr auf Exemplarisches. Im Gegensatz zu einer umfassenden Monographie wird immer am (hoffentlich schlagenden) Beispiel explizit vorgerechnet und dann die Verallgemeinerung nur angedeutet.

Zentral ist zunächst das dritte Kapitel, in dem gezeigt wird, wie Feynman-Diagramme durch Impulssubtraktionen endlich gemacht werden. Im vierten Kapitel wird dann vorgeführt, wie die Notwendigkeit dieser Subtraktionen zu nicht-naiven Effekten führen kann (Anomalien). Wesentlichstes Ergebnis ist der Beweis des Wirkungsprinzips in seiner quantisierten Form und seine Anwendung in einfachen Beispielen. Der zweite Schwerpunkt ist schließlich die Quantisierung nichtabelscher Eichtheorien (Kapitel sieben und neun). Sie ist so angelegt, daß sie im wesentlichen unabhängig vom Verfahren ist, mit dem man die Theorie endlich macht, und nur allgemeine Eigenschaften benutzt: die Lorentzinvarianz und als Konsequenz des Wirkungsprinzips die Tatsache, daß die Verletzung einer Symmetrie in führender Ordnung ein lokales Feldpolynom mit fixierter maximaler Dimension ist. Eine algebraische Analyse, die die jeweilige Eichgruppe charakterisiert, zeigt, ob es überhaupt Anomalien geben kann, während eine explizite Berechnung von Koeffizienten darüber entscheidet, ob letztere im betreffenden Modell wirklich auftreten oder nicht. Diese Methode ist sicher nicht die ökonomischte in einem jeweils konkreten Modell, aber sie zwingt einen dazu, sich über die maximale mögliche "Deformation" der Felder und ihrer Darstellungen unter Renormierung Klarheit zu verschaffen. Darüberhinaus ist sie selbst-konsistent, d.h. es fließen keine "Vorurteile" über das quantisierte Transformationsgesetz oder die Algebra in die Formulierung ein, sondern diese ergeben sich aus der Analyse.

Zum Abschluß noch einige allgemeine Bemerkungen. Die Vorlesungen richteten sich an Hörer, die mit der relativistischen Schreibweise und der Quantenmechanik vertraut und ansonsten dem Rechnen nicht abhold waren.

Die bibliographischen Angaben nach jedem Kapitel stellen eine ganz subjektive und keineswegs repräsentative Auswahl aus der einschlägigen Literatur dar. Als neueres Lehrbuch allgemeineren Charakters wird man mit Gewinn C. ITZYKSON, J.-B. ZUBER Quantum Field Theory (McGraw-Hill 1980) zu Rate ziehen, als Monographie mit ausgesprochen abstrakter Zielsetzung N.N. BOGOLUBOV, A.A. LOGUNOV, A.I.OKSAK, I.T. TODOROV, General principles of Quantum Field Theory (Kluwer 1990).

Teil I

Störungstheorie einfacher Modelle

Kapitel 1

Die Quantisierung freier Felder

1.1 Das skalare Feld

1.1.1 Kanonische Quantisierung

Der Ausgangspunkt für die kanonische Quantisierung des skalaren Feldes ist die Lorentz-invariante Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_{\mu}\varphi\partial^{\mu}\varphi - \frac{1}{2}m^{2}\varphi^{2} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^{2} - \underline{\nabla}\varphi\underline{\nabla}\varphi - \frac{1}{2}m^{2}\varphi^{2}.$$
 (1.1.1)

Das Feld $\varphi(x)$ erfüllt die klassische Bewegungsgleichung

$$\partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \varphi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0, \quad \text{d.h.}$$
 (1.1.2)

$$(\Box + m^2)\varphi = 0. \tag{1.1.3}$$

Zur dynamischen Variablen φ gehört der kanonisch konjugierte Impuls

$$\pi := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi} \tag{1.1.4}$$

und damit als Hamilton-Dichte

$$\mathcal{H} := \pi \dot{\varphi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\pi^2 + \underline{\nabla} \varphi \underline{\nabla} \varphi + m^2 \varphi^2).$$
(1.1.5)

Die Bewegungsgleichung (1.1.3) wird gelöst von

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk \ e^{-ikx} \delta(k^2 - m^2) \varphi(k).$$
(1.1.6)

Mit der Identität

$$\delta(k^2 - m^2) = \frac{\delta(k_o - \omega_k)}{2\omega_k} + \frac{\delta(k_o + \omega_k)}{2\omega_k}, \quad \omega_k \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$$
(1.1.7)

folgt

$$\varphi(x) = \int d^3k \left(\frac{e^{-i(\omega_k t - \mathbf{k}\mathbf{x})}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \frac{\varphi(\omega_k, \mathbf{k})}{\sqrt{2\omega_k}} + \frac{e^{i(\omega_k t - \mathbf{k}\mathbf{x})}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \frac{\varphi(-\omega_k, -\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega_k}} \right)$$
(1.1.8)

Interpretiert in der Form

$$\varphi(x) = \int d^3k \Big(f_k(x)a(k) + f_k^*(x)a^{\dagger}(k) \Big)$$
(1.1.9)

$$f_k(x) = \frac{e^{-i(\omega_k t - \mathbf{k}\mathbf{x})}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \qquad a = \frac{\varphi(\omega_k, \mathbf{k})}{\sqrt{2\omega_k}} \tag{1.1.10}$$

$$f_k^*(x) = \frac{e^{-i(\omega_k t - \mathbf{k}\mathbf{x})}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \qquad a^{\dagger} = \frac{\varphi(-\omega_k, -\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega_k}} \tag{1.1.11}$$

bedeutet (1.1.8) nichts anderes als die Entwicklung von φ in ebenen Wellen $f_k(x)$ und $f_k^*(x)$. Üblicherweise identifiziert man in dieser Zerlegung

$$\varphi(x) = \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x),$$
 (1.1.12)

$$\varphi^{(\pm)}(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} e^{\mp ikx} \begin{cases} a(k)\\ a^{\dagger}(k) \end{cases}$$
(1.1.13)

mit dem $\begin{cases} \text{positiven} \\ \text{negativen} \end{cases}$ Frequenzanteil von φ .

 $(kx = k_o x^o - \mathbf{kx} = \omega_k t - \mathbf{kx}).$

Daß $f_k(x)$ eine
ebene Welle mit Wellenvektor ${\bf k}$ und Frequen
z ω_k darstellt, ist ersichtlich aus

$$(\Box + m^2)f_k(x) = 0 \tag{1.1.14}$$

und den Orthogonalitätsrelationen

$$\int d^3x \ f_k^*(\mathbf{x},t) \ i \stackrel{\leftrightarrow}{\partial}_o \ f_{k'}(\mathbf{x},t) = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \tag{1.1.15}$$

$$\int d^3x \ f_k(\mathbf{x},t) \ i \stackrel{\leftrightarrow}{\partial}_o \ f_{k'}(\mathbf{x},t) = 0, \qquad (1.1.16)$$

sowie der Vollständigkeit

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) f_k^*(x') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{2k_o} e^{-ik(x-x')}$$
(1.1.17)

 $(\stackrel{\leftrightarrow}{\partial}_o \equiv -\stackrel{\leftarrow}{\partial}_o + \stackrel{\rightarrow}{\partial}_o).$

Die Entwicklung (1.1.9) läßt sich umkehren

$$a(k) = \int d^3x \ f_k^* \stackrel{\leftrightarrow}{\partial}_o \varphi, \qquad (1.1.18)$$

$$a^{\dagger}(k) = -i \int d^3x \ f_k \stackrel{\leftrightarrow}{\partial}_o \varphi, \qquad (1.1.19)$$

wobei sich herausstellt, daß die Funktionen a(k) und $a^{\dagger}(k)$ von t unabhängig sind. Jetzt läßt sich das Postulat der kanonischen Quantisierung

$$(\pi(x)\varphi(y) - \varphi(y)\pi(x))_{x_o = y_o} \equiv [\pi(x), \ \varphi(y)]_{x_o = y_o} = -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$
(1.1.20)
$$[\pi(x), \pi(y)]_{x_o = y_o} = [\varphi(x), \varphi(y)]_{x_o = y_o} = 0$$
(1.1.21)

$$\pi(x), \pi(y)]_{x_o = y_o} = [\varphi(x), \varphi(y)]_{x_o = y_o} = 0$$
(1.1.21)

bequem ausdrücken für die Operatoren a(k) und $a^{\dagger}(k)$:

$$[a(k), a^{\dagger}(k')] = \delta^{3}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$
(1.1.22)

$$[a(k), a (k')] = [a^{\dagger}(k), a^{\dagger}(k')] = 0$$
(1.1.23)

Diese Vertauschungsrelationen sind gerade solche von Erzeugern und Vernichtern für Quanten von harmonischen Oszillatoren der Frequenz ω_k . Damit ist der Weg für die Interpretation des Quantenfeldes φ als Überlagerung harmonischer Oszillatoren und der Konstruktion des zugehörigen physikalischen Hilbertraumes gewiesen. Eine Hilfe hierzu ist der Energie-Impuls-Tensor

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\mathcal{L} + \partial_{\mu}\varphi\partial_{\nu}\varphi, \qquad (1.1.24)$$

der die Energie- und die Impulsdichte des Systems angibt

$$T_{oo} = \frac{1}{2} (\pi^2 + \underline{\nabla}\varphi \underline{\nabla}\varphi + m^2 \varphi^2) \equiv \mathcal{H}, \qquad (1.1.25)$$

$$T_{oi} = -\pi \nabla_i \varphi \equiv \mathcal{P}_i. \tag{1.1.26}$$

Aus ihnen folgen Energie bzw. Impuls durch Integration

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d^3k \,\,\omega_k(a^{\dagger}(k)a(k) + a(k)a^{\dagger}(k)), \qquad (1.1.27)$$

$$P_i = \int d^3x \mathcal{P}_i = \frac{1}{2} \int d^3k \ k_i (a^{\dagger}(k)a(k) + a(k)a^{\dagger}(k)).$$
(1.1.28)

Diese Größen lassen sich zu einem kovarianten Vierervektor zusammenfassen

$$P_{\nu} = \frac{1}{2} \int d^3k \ k_{\nu}(a^{\dagger}(k)a(k) + a(k)a^{\dagger}(k)).$$
 (1.1.29)

Mit Hilfe von (1.1.22) und (1.1.23) ergeben sich als Vertauschungsrelationen

$$[P_{\nu}, a(p)] = -p_{\nu}a(p), \qquad (1.1.30)$$

$$[P_{\nu}, a^{\dagger}(p)] = +p_{\nu}a^{\dagger}(p), \qquad (1.1.31)$$

die nun endgültig die Definition des physikalischen Zustandsraums nahelegen. Wir fordern, daß für den Oszillator mit Wellenvektor **k** ein Grundzustand $\Phi_k(o)$ existiert, der durch die Relation

$$a_k \Phi_k(o) = 0 \tag{1.1.32}$$

ausgezeichnet ist. Der n_k -fach mit Anregungen des Oszillator k besetzte Zustand ist dann durch

$$\Phi_k(n_k) = \frac{1}{\sqrt{n_k!}} (a_k^{\dagger})^{n_k} \Phi_k(o)$$
(1.1.33)

gegeben und ist gemäß

$$(\Phi_k(n_k), \Phi_k(n'_k)) = \delta_{n_k n'_k}$$
(1.1.34)

 $({\rm diskret})^1$ normiert. Entsprechend ist die Existenz des normierten Vakuumzustandes

$$\Phi_o = \prod_k \Phi_k(o) \tag{1.1.35}$$

angenommen ((Φ_o, Φ_o) = 1).

Berechnen wir nun den Vakuumerwartungswert der Energie (1.1.27)

$$(\Phi_{o}, H\Phi_{o}) = \frac{1}{2} \int d^{3}k \, \omega_{k} \left\{ \prod_{k',k''} \left(\Phi_{k'}(o), a^{\dagger}(k)a(k)\Phi_{k''}(o) \right) + \prod_{k',k''} \left(\Phi_{k'}(o), a(k)a^{\dagger}(k)\Phi_{k''}(o) \right) \right\}$$
(1.1.36)

so finden wir eine der typischen Schwierigkeiten der Quantenfeldtheorie: der zweite Term verschwindet nicht, sondern divergiert

$$(\Phi_o, H \ \Phi_o) = \frac{1}{2} \int d^3k \ \omega_k = \infty \tag{1.1.37}$$

Er stellt die Summe der Nullpunktschwingungen aller Oszillatoren dar, die im Feld φ auftreten. Da in physikalischen Prozessen nur Energie*differenzen* meßbar sind, ein konstanter (d.h. zustandsunabhängiger) Beitrag zur Energie also nicht beobachtbar ist, *definieren* wir den Energie-Impuls-Vektor als:

$$P_{\nu} := \int dk \ k_{\nu} a^{\dagger}(k) a(k), \qquad (1.1.38)$$

mit

$$(\Phi_o, P_\nu \Phi_o) = 0. \tag{1.1.39}$$

Diese sogenannte Normalordnung wird noch des öfteren eine Rolle spielen. Daß die Definition (1.1.38) sinnvoll ist, nämlich die wichtigste Eigenschaft von P_{ν} nicht beeinflußt, zeigt eine kleine Rechnung:

$$i[P_{\nu},\varphi(x)] = \partial_{\nu}\varphi(x) \tag{1.1.40}$$

 $^{^1 \}rm Die diskrete Normierung ist detailliert beschrieben in Bjorken/Drell II Kap. 12.1. Sie erlaubt die knappste Formulierung des gegenwärtigen Sachverhalts.$

Sie besagt, daß der Energie-Impuls-Operator (1.1.38) auf dem Quantenfeld $\varphi(x)$, die Raum-Zeit-Translationen erzeugt. (1.1.40) ist die infinitesimale Version von

$$e^{iP_{\nu}a^{\nu}}\varphi(x)e^{-iP_{\nu}a^{\nu}} = \varphi(x+a).$$
 (1.1.41)

Und das zeichnet die Observable "Energie-Impuls" ja auch in der klassischen Theorie und der Quantenmechanik aus.

1.1.2 Die invarianten Greenschen Funktionen

Für die später zu entwickelnde Störungstheorie sind die sogenannten Greenschen Funktionen eines skalaren Feldes von grundlegender Bedeutung. Wir wollen sie daher kurz beschreiben.

Der Kommutator

$$[\varphi(x),\varphi(y)] = i\Delta(x-y) \tag{1.1.42}$$

hängt als Folge der Translationsinvarianz der Theorie nur von der Differenz der Argumente ab. Daß er kein Operator, sondern eine Funktion ist, folgt aus der Darstellung (1.1.9) des Feldes φ und den Vertauschungsrelationen (1.1.22) und (1.1.23). Mit Hilfe dieser Formeln läßt sich Δ auch explizit berechnen. Eine andere instruktive Herleitung ergibt sich aus der Beobachtung, daß die Bewegungsgleichung (1.1.3) von φ zur entsprechenden Differentialgleichung für Δ führt:

$$(\Box_x + m^2)\Delta(x - y) = 0 \tag{1.1.43}$$

Die kanonischen Vertauschungsrelationen (1.1.20) und (1.1.21) sind gerade die Vorgabe bestimmter Randwerte für Δ , nämlich

$$\Delta(x-y)\Big|_{x_o=y_o} = 0 \tag{1.1.44}$$

$$\dot{\Delta}(x-y)\Big|_{x_o=y_o} = -\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{1.1.45}$$

und bilden somit ein Cauchy-Problem mit der eindeutigen Lösung

$$\Delta(x-y) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int dk \ e^{-ik(x-y)} \varepsilon(k_o) \delta(k^2 - m^2)$$

$$\varepsilon(k_o) = \begin{cases} +1 & k_o > 0 \\ -1 & k_o < 0 \end{cases}$$
(1.1.46)

Die *kausale* Greensche Funktion ist definiert als der Vakuumerwartungswert des zeitgeordneten Produktes zweier Feldoperatoren:

$$\Delta_{c}(x-y) = \langle T\varphi(x)\varphi(y) \rangle$$

= $\theta(x_{o} - y_{o})\langle\varphi(x)\varphi(y)\rangle + \theta(y_{o} - x_{o})\langle\varphi(y)\varphi(x)\rangle$
$$\theta(x_{o} - y_{o}) = \begin{cases} 1 & x_{o} - y_{o} > 0\\ 0 & x_{o} - y_{o} < 0 \end{cases}$$
 (1.1.47)

Um ihre explizite Form zu finden, ist es zweckmäßig, die Zerlegung (1.1.12) von φ in positive und negative Frequenzanteile zu benutzen.

$$i\Delta_{+}(x-y) = \langle \varphi(x)\varphi(y)\rangle = \langle \varphi^{(+)}(x)\varphi^{(-)}(y)\rangle$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{3}} \int \frac{d^{3}k}{2\omega_{k}} e^{-ik(x-y)}$$
(1.1.48)

enthält nur positive Frequenzanteile,

$$-i\Delta_{-}(x-y) = \langle \varphi(y)\varphi(x)\rangle = \langle \varphi^{(+)}(y)\varphi^{(-)}(x)\rangle \qquad (1.1.49)$$

enthält nur negative Frequenzanteile. Δ_{\pm} erfüllen die homogene Differentialgleichung

$$(\Box + m^2)\Delta_{\pm} = 0,$$
 (1.1.50)

während

$$\Delta_{c}(x-y) = \theta(x_{o} - y_{o})\Delta_{+}(x-y) + \theta\Big(-(x_{o} - y_{o})\Big)\Big(-\Delta_{-}(x-y)\Big)$$
(1.1.51)

die inhomogene Gleichung

$$(\Box + m^2)\Delta_c(x - y) = -i\delta(x - y)$$
(1.1.52)

mit den Randbedingungen, daß sie für

$$x_o - y_o \to +\infty$$
 nur positive Frequenzanteile
 $x_o - y_o \to -\infty$ nur negative Frequenzanteile

enthalten soll, erfüllt. Deren eindeutige Lösung lautet

$$\Delta_c(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int dk \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad \varepsilon \to 0 \tag{1.1.53}$$

Hier gibt der ε -Beitrag im Nenner an, wie die Pole in der komplexen ω_k -Ebene umgangen werden sollen (für $\varepsilon \to 0$).

Die physikalische Interpretation für Δ_c ist die folgende: Falls $y_o > x_o$, so gilt

$$\Delta_c(x-y) = \langle \varphi^{(+)}(y)\varphi^{(-)}(x)\rangle \tag{1.1.54}$$

und das ist die Amplitude für den Prozeß, bei dem ein Teilchen bei x erzeugt und anschließend bei y vernichtet wird. Entsprechendes gilt für $x_o > y_o$:

$$\Delta_c(x-y) = \langle \varphi^{(+)}(x)\varphi^{(-)}(y) \rangle \tag{1.1.55}$$

d.h. Δ_c ist die Gesamtamplitude für die Möglichkeiten der Propagation eines Teilchens zwischen x und y, die kompatibel ist mit der Lorentzinvarianz.

Als weitere Lösung der inhomogenen Gleichung (1.1.52) benötigen wir noch die retardierten bzw. avancierten Greenschen Funktionen, die durch die Randbedingungen

$$\Delta_{ret} = \begin{cases} 0 & \text{für } x_o < 0\\ -\Delta & \text{für } x_o > 0 \end{cases}$$
(1.1.56)

$$\Delta_{av} = \begin{cases} 0 & \text{für } x_o > 0 \\ \Delta & \text{für } x_o < 0 \end{cases}$$
(1.1.57)

festgelegt sind.

Wir fassen diese Informationen über die Greenschen Funktionen zusammen. Lösungen der homogenen Gleichung:

$$(\Box + m^2)G_\lambda = 0 \tag{1.1.58}$$

$$G_{\lambda}(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{C_{\lambda}} d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2}$$
(1.1.59)

Für die in Abb. 1.1.2 angegebenen Integrationswege folgt

$$C_G: G = i\Delta = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk \ e^{-ikx} \varepsilon(k_o) \delta(k^2 - m^2)$$
(1.1.60)

$$C_{+}:G_{+} = i\Delta_{+} = \frac{1}{(2\pi)^{3}} \int dk \ e^{-ikx}\theta(+k_{o})\delta(k^{2}-m^{2})$$
(1.1.61)

$$C_{-}: G_{-} = -i\Delta_{-} = \frac{1}{(2\pi)^{3}} \int dk \ e^{-ikx} \theta(-k_{o})\delta(k^{2} - m^{2})$$
(1.1.62)

$$\Delta = \Delta_+ + \Delta_- \tag{1.1.63}$$

$$\Delta(x) = 0$$
 für $x^2 < 0$ (1.1.64)

Lösungen der inhomogenen Gleichung:

$$(\Box + m^2)G_\lambda = \delta^{(4)}(x)$$
 (1.1.65)

$$G_{\lambda}(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{C_{\lambda}} dk \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2}$$
(1.1.66)



Abbildung 1.1.2: Integrationswege für G,G_+,G_-

Die in Abb. 1.1.2 angegebenen Integrationswege kann man für ${x_o>0 \choose x_o<0}$ in der ${\text{unteren} \atop \text{oberen}}$ Halbebene schließen und erhält

$$\begin{array}{ccccc} x_0 < 0 & x_0 > 0 \\ \hline \Delta_{ret} &=& G_{ret} &=& 0 & -i\Delta \\ \Delta_{av} &=& G_{av} &=& i\Delta & 0 \\ \Delta_c &=& G_c &=& \Delta_+ & -\Delta_- \end{array}$$

$$\Delta_{c}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{i}{(2\pi)^{4}} \int d^{4}k \frac{e^{-ikx}}{k^{2} - m^{2} + i\varepsilon}$$
(1.1.67)

$$\Delta_{ret}(x) = \lim_{\substack{\eta \to 0\\\eta \in V_+}} \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-ikx}}{(k+i\eta)^2 - m^2}$$
(1.1.68)

$$\Delta_{av}(x) = \lim_{\substack{\eta \to 0\\\eta \in V_+}} \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-ikx}}{(k-i\eta)^2 - m^2}$$
(1.1.69)

Sehr wichtig wird auch die folgende Relation sein:

_

$$\Delta(x,m^2) = \lim_{\substack{\eta \to 0\\\eta \in V_+}} \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4 k e^{-ikx} \left(\frac{1}{(k-i\eta)^2 - m^2} - \frac{1}{(k+i\eta)^2 - m^2} \right)$$
(1.1.70)

 $\Delta(x, m^2) = \Delta_{av}(x, m^2) - \Delta_{ret}(x, m^2)$ (1.1.71)

1.2 Spin 1/2

1.2.1 Dirac-Spinoren

Das Dirac-Feld ψ ist ein Feld mit vier komplexen Komponenten, das die Bewegungsgleichung

$$(i\partial - m)\psi = 0 \tag{1.2.1}$$

erfüllt (die Dirac-Gleichung). Hierin sind (4×4)-Matrizen γ^{μ} mit dem Differentialoperator ∂_{μ} kombiniert,

$$\partial \!\!\!/ \equiv \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \tag{1.2.2}$$

während m die Einheitsmatrix multipliziert. Die γ -Matrizen erfüllen die Algebra

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} \equiv \{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu} . \qquad (1.2.3)$$

Zu ψ definieren wir den adjungierten Spinor

$$\bar{\psi} \equiv \psi^{\dagger} \gamma^{o} , \qquad (1.2.4)$$

der der Bewegungsgleichung

$$\bar{\psi}(i \not \partial + m) = 0 \tag{1.2.5}$$

gehorcht. Beide Bewegungsgleichungen können aus der Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\bar{\psi}(i\overrightarrow{\partial} - m)\psi + \frac{1}{2}\bar{\psi}(-i\overleftarrow{\partial} - m)\psi$$
(1.2.6)

gewonnen werden. Da

$$(i\partial \!\!\!/ + m)(i\partial \!\!\!/ - m) = -\partial_{\mu}\partial_{\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - m^{2}$$

$$= -(\frac{1}{2}\partial_{\mu}\partial_{\nu}\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\} + m^{2}) = -(\Box + m^{2})$$
(1.2.7)

gibt, erfüllt jede Komponente von ψ bzw. $\bar{\psi}$ die Klein-Gordon-Gleichung

$$(\Box + m^2)\psi = 0 , \qquad (1.2.8)$$

$$(\Box + m^2)\bar{\psi} = 0. \qquad (1.2.9)$$

Die Besonderheit, die aus ψ mehr als die Ansammlung von vier komplexen skalaren Feldern macht, ist das Verhalten von ψ unter Lorentztransformationen. Gehen wir von einem Koordinatensystem x_{μ} zu einem Lorentztransformierten

$$x'_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu}x_{\nu} \tag{1.2.10}$$

über, so transformiert sich $\psi(x)$ gemäß

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) , \qquad (1.2.11)$$

wobei die Matrizen $S(\Lambda)$ eine Darstellung der Lorentzgruppe bilden:

$$S(\Lambda_1 \Lambda_2) = S(\Lambda_1) S(\Lambda_2) \tag{1.2.12}$$

Die explizite Form für $S(\Lambda)$ lautet

$$S(\Lambda) = e^{\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\sum_{\mu\nu}} \tag{1.2.13}$$

$$\sum_{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}] \tag{1.2.14}$$

Mit diesen Relationen läßt sich zeigen, daß (1.2.1) eine Lorentz-kovariante Gleichung ist, d.h., daß im transformierten System ebenfalls gilt

$$(i \vec{\not} -m)\psi'(x') = 0$$
. (1.2.15)

Mit dem Ziel, die Felder ψ und $\bar{\psi}$ zu quantisieren, wollen wir nun eine Entwicklung in ebenen Wellen konstruieren, um dann zu Vertauschungsrelationen für Erzeuger und Vernichter zu gelangen. Als Konsequenz von (1.2.8) können wir schreiben

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk e^{-ikx} \delta(k^2 - m^2) \psi(k)$$

= $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk e^{-ikx} \left(\frac{\delta(k_o - E_k)}{2E_k} + \frac{\delta(k_o + E_k)}{2E_k} \right) \psi(k) \quad (E_k \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2})$
(1.2.16)

Dies entspricht wieder – wie im skalaren Fall – einer Lorentz-invarianten Aufteilung in positive und negative Frequenzanteile

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk \left(e^{-ikx} \psi^{(+)}(\mathbf{k}) + e^{ikx} \psi^{(-)}(\mathbf{k}) \right)_{k_o = E_k}$$
(1.2.17)

Um die Grundlösungen in ebenen Wellen zu erhalten, setzen wir an

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk \left(e^{-ikx} u(\mathbf{k}) + e^{ikx} v(\mathbf{k}) \right)_{k_o = E_k}$$
(1.2.18)

Als Konsequenz der Dirac-Gleichung (1.2.1) ergibt sich

$$(\not k - m)u(\mathbf{k})\Big|_{k_o = E_k} = 0$$
, (1.2.19)

$$(\not\!\!\!\!/ + m)v(\mathbf{k})\Big|_{k_o=E_k} = 0$$
 . (1.2.20)

1.2. SPIN 1/2

Um diese Gleichungen zu lösen, gehen wir ins Ruhesystem $\mathbf{k}=0, k_o=E_k=m$ über

$$(\gamma^{o}k_{o} - m)u(0)\Big|_{k_{o} = m} = 0 , \qquad (1.2.21)$$

d.h. wir müssen das gekoppelte Eigenwertproblem

$$(\gamma^o - \mathbf{1})u(0) = 0 \tag{1.2.22}$$

$$(\gamma^o + \mathbf{1})v(0) = 0 \tag{1.2.23}$$

lösen. Hierzu benutzen wir eine explizite Form der γ -Matrizen d.h. wählen eine bestimmte Basis für sie aus (und zeigen an späterer Stelle die Basisunabhängigkeit des Ergebnisses).

$$\gamma^{o} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^{k} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{k} \\ -\sigma^{k} & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^{k} : \text{Pauli-Matrizen}$$
(1.2.24)

(Weyl-Basis der γ -Matrizen)

Wir diagonalisieren γ^o mit Hilfe von

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$$
(1.2.25)

und finden

$$\gamma^{o\prime} = X\gamma^{o}X^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0\\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$$
(1.2.26)

Nun ist das Eigenwertproblem (1.2.22), (1.2.23) trivial zu lösen. Wir wählen als linear unabhängige Basisvektoren die Einheitsvektoren

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \qquad u^{(2)} = \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \qquad v^{(1)} = \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \qquad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix}.$$
(1.2.27)

Die Lösung zum Impuls k erhalten wir über eine Lorentztransformationen

$$u(\mathbf{k}) = S(L^{-1}(k))u(0) , \qquad (1.2.28)$$

und zwar mit der inversen zu der, die den Vektor k auf das Ruhesystem $k_R = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ transformiert.

$$L(k)k = k_R \tag{1.2.29}$$

Die Matrix $S(L^{-1}(k))$ zu bestimmen heißt, den Zusammenhang zwischen einer vektoriellen Darstellung der Lorentzgruppe SO(1,3) und einer spinoriellen herzustellen. (Bei der letzteren handelt es sich genauer um eine Darstellung der Gruppe

 $SL(2,\mathbf{C}) = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | \det M = 1; a, b, c, d \in \mathbf{C}\}$.) Mit Hilfe der Pauli-Matrizen und der (2 × 2) Einheitsmatrix läßt sich das folgendermaßen bewerkstelligen. Einem Vektor x_{μ} ordnen wir die Matrix

$$x = x_{\mu}\sigma^{\mu}$$
 ($\sigma^{o} = \mathbf{1}, \sigma^{k} = \text{Pauli-M.}$) (1.2.30)

zu. Dem lorentztransformierten Vektor

$$x'_{\mu} = L_{\mu}{}^{\nu}x_{\nu} \tag{1.2.31}$$

entspricht dann

$$x' = M(L)xM^{\dagger}(L) \qquad M(L) \in SL(2, \mathbb{C})$$
(1.2.32)

Für die spezielle Transformation L(k) (1.2.29) gilt also

$$m = M(L)\sigma_{\mu}k^{\mu}M^{\dagger}(L) \tag{1.2.33}$$

Eine Lösung lautet

$$M(L) = \frac{1}{\sqrt{2m(m+k_o)}} (m + \bar{\sigma}^{\mu} k_{\mu})$$
(1.2.34)
$$\bar{\sigma}^o = \mathbf{1}, \quad \bar{\sigma}^k = -\sigma^k$$

Dann läßt sich die (4×4) -Matrix $S(L^{-1}(k))$ schreiben als

$$S(L^{-1}(k)) = \frac{1}{\sqrt{2m(m+k_o)}} \begin{pmatrix} m + \bar{\sigma}k & 0\\ 0 & m + \sigma k \end{pmatrix}.$$
 (1.2.35)

Eine Form von S, die unabhängig von der gewählten Basis der $\gamma\text{-}\mathrm{Matrizen}$ ist, ist die folgende

$$S(L^{-1}(k)) = \frac{1}{\sqrt{2m(m+k_o)}} (m + \gamma^{\mu} k_{\mu} \gamma^o)$$
(1.2.36)

Damit ergibt sich für die Spinoren u und v

$$u(\mathbf{k},s) = \frac{1}{\sqrt{2m(m+k_o)}}(m+\gamma^{\mu}k_{\mu})u^s(0), \qquad (1.2.37)$$

$$v(\mathbf{k},s) = \frac{1}{\sqrt{2m(m+k_o)}} (m - \gamma^{\mu} k_{\mu}) v^s(0).$$
(1.2.38)

Der Index s (für Spin) hat die Werte s = 1, 2. Die entsprechenden Überlegungen lassen sich für den adjungierten Spinor ausführen:

$$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk \left(e^{-ikx} \bar{u}(\mathbf{k}) + e^{ikx} \bar{v}(\mathbf{k}) \right)$$
(1.2.39)

1.2. SPIN 1/2

mit den Bedingungen

$$\bar{u}(\mathbf{k})(\not k - m)\Big|_{k_o = E_k} = 0 \tag{1.2.40}$$

$$\bar{v}(\mathbf{k})(\not\!\!\!k+m)\Big|_{k_o=E_k} = 0 \tag{1.2.41}$$

und den Lösungen

$$\bar{u}(k,s) = \bar{u}^s(0)(m + \gamma^{\mu}k_{\mu})\frac{1}{\sqrt{2m(m+k_o)}}$$
(1.2.42)

$$\bar{v}(k,s) = \bar{v}^s(0)(m - \gamma^{\mu}k_{\mu})\frac{1}{\sqrt{2m(m+k_o)}}$$
(1.2.43)

Für das Gesamtsystem der Lösungen gelten die folgenden Eigenschaften: Orthogonalität:

$$\bar{u}(k,s)u(k,s') = \delta_{ss'} = -\bar{v}(k,s)v(k,s')$$
(1.2.44)

$$u^{\dagger}(k,s)u(k,s') = \frac{E_k}{m}\delta_{ss'} = v^{\dagger}(k,s)v(k,s')$$
(1.2.45)

$$\bar{v}(k,s)u(k,s') = 0 = v^{\dagger}(k,s)u(-k,s')$$
 (1.2.46)

Vollständigkeit:

$$\sum_{s} u_{\alpha}(k,s)\bar{u}_{\beta}(k,s) = \left(\frac{\not\!k+m}{2m}\right)_{\alpha\beta} =: (\Lambda_{+}(k))_{\alpha\beta}$$
(1.2.47)

$$\sum_{s} \left(u_{\alpha}(k,s)\bar{u}_{\beta}(k,s) - v_{\alpha}(k,s)\bar{v}_{\beta}(k,s) \right) = \delta_{\alpha\beta}$$
(1.2.49)

D.h. Λ_{\pm} projezieren auf die positiven bzw. negativen Frequenzanteile.

$$\Lambda_{\pm}^2 = \Lambda_{\pm}, \quad \Lambda_{+}\Lambda_{-} = \Lambda_{-}\Lambda_{+} = 0, \quad \Lambda_{+} + \Lambda_{-} = \mathbf{1}$$
(1.2.50)

Aus diesen speziellen Lösungen läßt sich die allgemeine Lösung durch Superposition gewinnen

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \left(e^{-ikx} \sum_s \sqrt{\frac{m}{E_k}} b(k,s) u(k,s) + e^{ikx} \sum_s \sqrt{\frac{m}{E_k}} d^{\dagger}(k,s) v(k,s) \right)$$
(1.2.51)
$$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \left(e^{ikx} \sum_s \sqrt{\frac{m}{E_k}} b^{\dagger}(k,s) \bar{u}(k,s) + e^{-ikx} \sum_s \sqrt{\frac{m}{E_k}} d(k,s) \bar{v}(k,s) \right)$$
(1.2.52)

(Die Faktoren $\sqrt{\frac{m}{E_k}}$ sind zur Normierung von *b* und *d* eingefügt, s.u.) Die Zerlegung in positive und negative Frequenzanteile ist gegeben durch

$$\psi^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{-ikx} \sum_s \sqrt{\frac{m}{E_k}} b(k,s) u(k,s), \qquad (1.2.53)$$

$$\psi^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{ikx} \sum_s \sqrt{\frac{m}{E_k}} d^{\dagger}(k,s) v(k,s).$$
(1.2.54)

Analog entspricht der erste Term in (1.2.52) $\bar{\psi}^{(-)}(x)$, der zweite $\bar{\psi}^{(+)}(x)$ und es gilt die Adjungierungsregel

$$\bar{\psi}^{(-)} = \overline{\psi^{(+)}}, \qquad \bar{\psi}^{(+)} = \overline{\psi^{(-)}}$$
 (1.2.55)

Um die Felder ψ und $\bar{\psi}$ zu quantisieren, könnten wir versuchen, kanonisch vorzugehen, also zu ψ und $\bar{\psi}$ die kanonisch konjugierten Impulse

$$\pi_{\psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \frac{i}{2} \psi^{\dagger}, \qquad (1.2.56)$$

$$\pi_{\bar{\psi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = -\frac{i}{2} \gamma^o \psi \tag{1.2.57}$$

einzuführen. Es ergäbe sich aber sofort die Schwierigkeit, daß diese Relationen nicht gestatten, nach $\dot{\psi} = \dot{\psi}(\pi)$ aufzulösen. Man hätte dann das Konzept der kanonischen Quantisierung zu erweitern und zu zeigen, daß es auch in diesem Fall ein vernünftiges Ergebnis liefert. Wir wollen diesen Aufwand vermeiden und heuristisch – in enger Anlehnug an den Fall des skalaren Feldes – geeignete Relationen postulieren. Hierzu betrachten wir den Energie-Impuls-Tensor

$$T_{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\bar{\psi}\gamma_{\mu}\partial_{\nu}\psi - \partial_{\nu}\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi) \qquad (1.2.58)$$

(der wegen (1.2.8) erhalten ist)

und berechnen aus ihm Energie und Impuls des Systems

$$H = \int d^3 x \mathcal{H} = \int d^3 x T_{oo}, \qquad (1.2.59)$$

$$P_i = \int d^2 x \mathcal{P}_i = \int d^3 x T_{io}. \tag{1.2.60}$$

Ausgedrückt in den Größen $b, d, b^{\dagger}, d^{\dagger}$, die wir nach der Quantisierung als Vernichter bzw. Erzeuger interpretieren wollen, lauten sie

$$H = \sum_{s} \int d^{3}k \ E_{k} \left(b^{\dagger}(k,s)b(k,s) - d(k,s)d^{\dagger}(k,s) \right), \qquad (1.2.61)$$

$$P_{i} = \sum_{s} \int d^{3}k \ k_{i} \left(b^{\dagger}(k,s)b(k,s) - d(k,s)d^{\dagger}(k,s) \right).$$
(1.2.62)

1.2. SPIN 1/2

Wie für das skalare Feld erwarten wir auch hier, daß man zur Normalordnung (Erzeuger-links, Vernichter-rechts) übergehen muß, um die unendliche Nullpunktsenergie zu vermeiden. Benutzen wir zur Vertauschung von d^{\dagger} mit d aber den Kommutator, dann ist die Energie nicht positiv definit, denn ein d^{\dagger} Zustand hätte den negativen Eigenwert $-E_k$. Soll die Energie positiv definit bleiben, müssen d und d^{\dagger} also einen nicht-verschwindenden Anti-Kommutator haben. Diese Regel führt sofort zum Auschließungsprinzip: zwei gleiche Zustände (charakterisiert etwa mit k und s) können nicht doppelt besetzt sein.

Wir postulieren also als Vertauschungsrelationen Anti-Kommutatoren:

$$\{b(k,s), b^{\dagger}(k',s')\} = \delta_{ss'}\delta^{3}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$
(1.2.63)

$$\{d(k,s), d^{\dagger}(k',s')\} = \delta_{ss'}\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$
(1.2.64)

Alle anderen Anti-Kommutatoren von $b, b^{\dagger}, d, d^{\dagger}$ verschwinden. Als normalgeordneten Energie- und Impuls-*Operator* definieren wir also

$$H = \sum_{s} \int d^{3}k E_{k} \left(b^{\dagger}(k,s)b(k,s) + d^{\dagger}(k,s)d(k,s) \right)$$
(1.2.65)

$$P_{i} = \sum_{s} \int d^{3}k k_{i} \left(b^{\dagger}(k,s)b(k,s) + d^{\dagger}(k,s)d(k,s) \right)$$
(1.2.66)

mit den zu (1.1.30) völlig analogen Relationen

$$[H, b^{\dagger}(k, s)] = E_k b^{\dagger}(k, s) \tag{1.2.67}$$

$$[H, d^{\dagger}(k, s)] = E_k d^{\dagger}(k, s) \tag{1.2.68}$$

$$[P_i, b^{\dagger}(k, s)] = k_i b^{\dagger}(k, s) \tag{1.2.69}$$

$$[P_i, d^{\dagger}(k, s)] = k_i d^{\dagger}(k, s) \tag{1.2.70}$$

Als "Probe" für unsere obigen Überlegungen betrachten wir noch einmal den Fall des skalaren Feldes. In (1.1.27) hatten wir für die Energie vor der Normalordnung den Ausdruck

$$H = \frac{1}{2} \int dk \omega_k \left(a^{\dagger}(k) a(k) + a(k) a^{\dagger}(k) \right)$$
(1.2.71)

erhalten. Fordern wir hier versuchsweise, daß $a^{\dagger}(k)$ mit a(k) anti-kommutiert, so verschwindet H – sicher kein sinnvolles Ergebnis. Dies ist in einfachster Form der Zusammenhang zwischen Spin und Statistik: Felder mit ganzahligem Spin gehorchen der Bosestatistik d.h. sind zu quantisieren mit Kommutatoren, Felder mit halbzahligem Spin gehorchen der Fermistatistik d.h. sind zu quantisieren mit Anti-Kommutatoren.

Aus der Form (1.2.51),(1.2.52) der Felder folgen mit (1.2.63),(1.2.64) die gleichzeitigen Anti-Kommutatoren

$$\{\psi_{\alpha}(x), \psi^{\dagger}_{\beta}(y)\}_{x_o=y_o} = \delta_{\alpha\beta}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$
(1.2.72)

$$\{\psi_{\alpha}(x),\psi_{\beta}(y)\}_{x_{o}=y_{o}} = \{\bar{\psi}_{\alpha}(x),\bar{\psi}_{\beta}(y)\}_{x_{o}=y_{o}} = 0$$
(1.2.73)

Ebenso ergibt sich für beliebiges Argument

$$\{\psi_{\alpha}(x), \bar{\psi}_{\beta}(y)\} = -iS_{\alpha\beta}(x-y) = (i\partial_x + m)i\Delta(x-y)$$
(1.2.74)

$$\{\psi_{\alpha}(x),\psi_{\beta}(y)\} = \{\bar{\psi}_{\alpha}(x),\bar{\psi}_{\beta}(y)\} = 0$$
(1.2.75)

Die Funktion $\Delta(x - y)$ ist die Kommutatorfunktion (1.1.46) des skalaren Feldes. Wir definieren die Zeitordnung für Fermionen so, daß sie zur Normalordnung paßt, d.h. Vertauschen zweier Fermionen liefert ein Minuszeichen

$$T(\psi_1(x)\psi_2(y)) = \theta(x_o - y_o)\psi_1(x)\psi_2(y) -\theta(y_o - x_o)\psi_2(x)\psi_1(y) .$$
(1.2.76)

Analog zum skalaren Feld wird der Propagator definiert durch

$$\langle o|T\left(\psi_{\beta}(y)\bar{\psi}_{\alpha}(x)\right)|o\rangle = iS_{c}(y,x)_{\beta\alpha}$$
 (1.2.77)

Er beschreibt die Erzeugung eines Fermions am Ort \mathbf{x} , zur Zeit $x_o := \psi_{\alpha}^{\dagger}(x)|o\rangle$ ($\alpha = 1, \ldots, 4$ Spinorkomponenten), seine kovariante Propagation an den Ort \mathbf{y} , seine Vernichtung bei \mathbf{y} zur Zeit $y_o > x_o$ und gibt die Amplitude für diesen Prozeß an.

$$i(S_c(y,x)\gamma^o)_{\beta\alpha} = \langle o|\psi_{\beta}(y)\psi_{\alpha}^{\dagger}(x)|o\rangle\theta(x_o - y_o) - \langle o|\psi_{\alpha}^{\dagger}(x)\psi_{\beta}(y)|o\rangle\theta(x_o - y_o)$$
(1.2.78)

Unter Verwendung der Anti-Kommutatorfunktionen ergibt sich

$$S_c(x)_{\alpha\beta} = -i(i\partial \!\!\!/ + m)\Delta_c(x) , \qquad (1.2.79)$$

wobei $\Delta_c(x)$ die kausale Greensche Funktion (1.1.54) des skalaren Feldes ist. Im Impulsraum folgt

$$S_c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk e^{-ikx} \frac{\not\!\!\!\!\!/ k + m}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}$$
(1.2.80)

und damit als Differentialgleichung

$$(i\partial - m)S_c(x) = \delta(x) \tag{1.2.81}$$

1.2.2 Weyl-Spinoren

Ein zweikomponentiges komplexes Feld $\varphi_{\alpha}(x)$ $\alpha = 1, 2, \text{ das sich unter } M \in SL(2, \mathbf{C} = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | det M = 1 \ a, b, c, d \in \mathbf{C}\}$ gemäß

$$\varphi_{\alpha}' = M_{\alpha}{}^{\beta}\varphi_{\beta} \tag{1.2.82}$$

transformiert, heißt Weyl-Spinor. Zu ihm gehört eine Lorentz-invariante Wellengleichung der Form

$$i\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha}\partial_{\mu}\varphi_{\alpha} = 0$$
 $\mu = 0, 1, 2, 3$
 $\alpha, \dot{\alpha} = 1, 2$ (1.2.83)

1.2. SPIN 1/2

 $(\bar{\sigma}_o = \mathbf{1}, \ \bar{\sigma} := -\text{Pauli-Matrizen}).$ Der zu φ_{α} kontragradiente Spinor φ^{α} transformiert sich unter M^{-1T}

$$\varphi^{\prime \alpha} = M^{-1T\alpha}{}_{\beta}\varphi^{\beta} \tag{1.2.84}$$

Wegen
$$M^{-1\beta}{}_{\alpha} = \varepsilon^{\beta\gamma} M_{\gamma}{}^{\delta} \varepsilon_{\delta\alpha}$$
 (1.2.85)

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
(1.2.86)

ist M^{-1T} zu M äquivalent. D.h. man kann mit der "Metrik" ε Indizes "ziehen":

$$\varphi^{\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta}\varphi_{\beta}, \qquad \varphi_{\beta} = \varepsilon_{\beta\gamma}\varphi^{\gamma}$$
(1.2.87)

Nicht-äquivalent zu M ist die komplexe konjugierte Darstellung M^* . Unter ihr transformiert sich der zu φ komplex konjugierte Spinor

$$\bar{\varphi}_{\dot{\alpha}} = M^{*\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}\bar{\varphi}_{\dot{\beta}} \tag{1.2.88}$$

Auch hier lassen sich Indizes "ziehen"

$$\bar{\varphi}_{\dot{\alpha}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\varphi}^{\dot{\beta}}, \qquad \bar{\varphi}^{\dot{\beta}} = \varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}\bar{\varphi}_{\dot{\gamma}} \tag{1.2.89}$$

Der komplex konjugierte Spinor gehorcht der invarianten Wellengleichung

$$i\sigma^{\mu}{}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\bar{\varphi}^{\dot{\alpha}} = 0 \tag{1.2.90}$$

 $(\sigma^o = \mathbf{1}, \sigma^i = \text{Pauli-Matrizen})$

Diese Wellengleichungen lassen sich herleiten aus einer invarianten Wirkung

$$\Gamma = \int dx \frac{i}{2} \left(\varphi^{\alpha} \sigma^{\mu}_{\alpha \dot{\alpha}} \partial_{\mu} \bar{\varphi}^{\dot{\alpha}} - \bar{\varphi}_{\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^{\mu \dot{\alpha} \alpha} \partial_{\mu} \varphi_{\alpha} \right) .$$
(1.2.91)

Wie die Indexstruktur der Wellengleichungen (1.2.83),(1.2.90) zeigt, läßt sich für einen Weyl-Spinor kein invarianter Massenterm konstruieren – es muß immer ein komplex konjugierter Spinor mit erfaßt werden:

$$i\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha}\partial_{\mu}\varphi_{\alpha} + m\bar{\varphi}^{\dot{\alpha}} = 0 \tag{1.2.92}$$

$$i\bar{\sigma}^{\mu}{}_{\dot{\alpha}\alpha}\partial_{\mu}\bar{\varphi}^{\dot{\alpha}} + m\varphi_{\alpha} = 0 \tag{1.2.93}$$

$$\Gamma_m = \int dx m (\varphi^{\alpha} \varphi_{\alpha} + \bar{\varphi}_{\dot{\alpha}} \bar{\varphi}^{\dot{\alpha}})$$
(1.2.94)

$$\varphi^{\alpha}\varphi_{\alpha} \equiv \varepsilon^{\alpha\beta}\varphi_{\beta}\varphi_{\alpha}, \qquad \bar{\varphi}_{\dot{\alpha}}\bar{\varphi}^{\dot{\alpha}} \equiv \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\varphi}_{\dot{\alpha}}\bar{\varphi}_{\dot{\beta}} \qquad (1.2.95)$$

Die Propagatoren für einen massiven Weyl-Spinor und seinen komplex konjugierten lassen sich am einfachsten berechnen durch Inversion der Zwei-Punkt-Funktion (vergl. Abschnitt 9.2.2). Sie lauten

$$\langle T\varphi_{\alpha}(x)\bar{\varphi}_{\dot{\alpha}}(y)\rangle = i\sigma^{\mu}{}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\Delta_{c}(x-y)$$
(1.2.96)

$$\langle T\varphi_{\alpha}(x)\varphi_{\beta}(y)\rangle = m\varepsilon_{\alpha\beta}\Delta_c(x-y)$$
 (1.2.97)

$$\langle T\bar{\varphi}_{\dot{\alpha}}(x)\bar{\varphi}_{\dot{\beta}}(y)\rangle = m\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\Delta_c(x-y) \tag{1.2.98}$$

Aus zwei Weyl-Spinoren und ihren komplex konjugierten läßt sich ein Dirac-Spinor und sein adjungierter konstruieren:

$$\psi_D = \begin{pmatrix} \varphi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{1.2.99}$$

$$\bar{\psi}_D = (\bar{\varphi}_{\dot{\alpha}}, \chi^{\alpha})\gamma^o = (\bar{\varphi}_{\dot{\alpha}}, \chi^{\alpha}) \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} = (\chi^{\alpha}, \bar{\varphi}_{\dot{\alpha}})$$
(1.2.100)

Die invariante Wellengleichung setzt sich entsprechend zusammen:

$$\begin{pmatrix} m & i\sigma^{\mu}\partial_{\mu} \\ i\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu} & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \bar{\chi} \end{pmatrix} = 0$$
(1.2.101)

Und das ist gerade die Dirac-Gleichung (1.2.1) mit den γ -Matrizen in der Weyl-Basis. ψ_D (1.2.99) heißt daher "Dirac-Spinor in Weyl-Basis".

1.2.3 Majorana-Spinoren

Ein Majorana-Spinor in Weyl-Basis hat die Form

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \varphi_\alpha \\ \bar{\varphi}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{1.2.102}$$

D.h. der adjungierte

$$\bar{\psi}_M = \psi_M^{\dagger} \gamma^o = (\varphi^{\alpha}, \bar{\varphi}_{\dot{\alpha}}) \tag{1.2.103}$$

ist nicht wesentlich vom Spinor selbst unterschieden. Mathematisch ist ein Majorana-Spinor also ausgezeichnet durch eine Realitätseigenschaft. Physikalisch entspricht dies der Forderung, daß ψ_M sein eigenes Ladungs-konjugiertes ist. Der zu ψ_D Ladungs-konjugierte Spinor ist definiert durch

$$(\psi_M)^C = C\bar{\psi}_D^T \qquad C = i \begin{pmatrix} -\sigma^2 & 0\\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}$$
 (1.2.104)

(C in Weyl-Basis).

Damit folgt für einen Majorana-Spinor

$$\psi_1 = \psi_4^* \qquad \psi_2 = \psi_3^* \tag{1.2.105}$$

d.h. (1.2.102).

In einer rein imaginären Darstellung der γ -Matrizen (Majorana-Basis)

$$\gamma^{o} = -i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^{1} = -i \begin{pmatrix} o & \sigma^{1} \\ \sigma^{1} & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^{2} = -i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^{3} = -i \begin{pmatrix} o & \sigma^{3} \\ \sigma^{3} & 0 \end{pmatrix}$$

lautet die invariante Wirkung für einen Majorana-Spinor bis auf einen Faktor $\frac{1}{2}$ wie für einen Dirac-Spinor

$$\Gamma = \int dx \frac{1}{2} \bar{\psi}_M (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_M \qquad (1.2.106)$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ drückt gerade aus, daß der adjungierte Spinor nicht mehr unabhängig vom Spinor ist und daher bei der Variation von Γ nach ψ zwei Beiträge auftreten. Entsprechend sind die Propagatoren $\langle T\psi_M\psi_M\rangle$ und $\langle T\bar{\psi}_M\bar{\psi}_M\rangle$ nicht mehr null, sondern

$$\langle T\psi_M(x)\psi_M(y)\rangle = \frac{i}{(2\pi)^4} \int dk e^{-ik(x-y)} \frac{(\not k - m)\gamma^o}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}$$
(1.2.107)

$$\langle T\bar{\psi}_M(x)\bar{\psi}_M(y)\rangle = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int dk e^{-ik(x-y)} \frac{\gamma^o(\not k - m)}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}$$
 (1.2.108)

$$\langle T\psi_M(x)\bar{\psi}_M(y)\rangle = \frac{i}{(2\pi)^4} \int dk e^{-ik(x-y)} \frac{\not k - m}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}$$
 (1.2.109)

1.3 Das elektromagnetische Feld

Ein Satz von vier reellen Funktionen $A_{\mu}(x)$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) heißt Vektorfeld, wenn sich die Komponenten von A_{μ} unter Lorentztransformationen gemäß

$$A'_{\mu}(x') = \Lambda_{\mu}{}^{\nu}A_{\nu}(x) \tag{1.3.1}$$

transformieren. Hier ist

$$x'_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu}x_{\nu} \tag{1.3.2}$$

die im transformierten System x entsprechende Koordinate. Wir erhalten als Wirkung

$$\Gamma = \int dx \mathcal{L} = -\frac{1}{4} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \qquad (1.3.3)$$

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}, \qquad (1.3.4)$$

wenn wir fordern, daß Γ höchstens zweiter Ordnung in den Ableitungen, quadratisch in den Feldern, Lorentz-invariant und auch invariant unter Eichtransformationen

$$\delta_{\omega}A_{\mu}(x) = \partial_{\mu}\omega(x) \tag{1.3.5}$$

sein soll. Die Bewegungsgleichung für A_{μ} lautet

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta A^{\mu}} = \partial^{\nu} F_{\nu\mu} = (\Box g_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu})A^{\nu}$$
(1.3.6)

Als Konsequenz ergibt sich sofort

$$\partial^{\mu} \frac{\delta \Gamma}{\delta A^{\mu}} = 0 . \qquad (1.3.7)$$

Führen wir den funktionalen Differentialoperator

$$W_{\omega} \equiv -i \int dz \delta_{\omega} A_{\mu} \frac{\delta}{\delta A_{\mu}(z)}$$
(1.3.8)

oder sein lokales Äquivalent

$$w_{\omega} := \frac{\delta}{-i\delta\omega(x)} W_{\omega} = -\partial_{\mu} \frac{\delta}{\delta A_{\mu}(x)}$$
(1.3.9)

ein, so läßt sich (1.3.7) als

$$w_{\omega}(x)\Gamma \equiv -\partial_{\mu}\frac{\delta\Gamma}{\delta A_{\mu}} = 0 \tag{1.3.10}$$

schreiben und drückt genau die Invarianz von Γ unter den Eichtransformationen (1.3.5) aus. (1.3.10) heißt Ward-Identität.

Die kanonische Quantisierung stößt sofort auf ein ernstes Hindernis: mit

$$\pi^{\mu} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_{\mu}}$$

ist π^o – der kanonisch konjugierte Impuls zu A_o –

$$\pi^o = 0.$$

Dies ist ein sehr viel tiefer liegendes Problem als das analoge bei den Spin 1/2-Feldern. Dort kann der Kommutator aus dem Propagator gewonnen werden (vergl. Abschnitt 9.2.2), hier ist das unmöglich. Sowohl beim skalaren wie auch beim Spinorfeld ist der Propagator das Inverse zur zweiten Ableitung der Wirkung nach den Feldern:

skalares Feld :
$$(\Box + m^2)\Delta_c(x) = -i\delta(x)$$
 (1.3.11)

Dirac-Feld :
$$(i\partial - m)S_c(x) = \delta(x)$$
 (1.3.12)

Für das Vektorfeld lautet die entsprechende Bedingung

$$(g_{\lambda\mu}\Box - \partial_{\lambda}\partial_{\mu})\Delta_c^{\mu\nu} = i\delta_{\lambda}{}^{\nu}\delta(x).$$
(1.3.13)

Es ist aber leicht zu sehen, daß der Operator

$$P_{\mu\nu}^T = (g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu / \Box) \tag{1.3.14}$$

kein Inverses hat. Denn er bildet mit

$$P^L_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu / \Box \tag{1.3.15}$$

ein System von orthogonalen und vollständigen Projektoren:

$$P^{T}P^{T} = P^{T}, \qquad P^{L}P^{L} = P^{L}, \qquad P^{T}P^{L} = P^{L}P^{T} = 0, P^{T}_{\mu\nu} + P^{L}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = ``1".$$
(1.3.16)

Projektoren (außer der Identität) haben aber kein Inverses.

(Z.B. det
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$
, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist Projector.)

Damit sind für die weitere Formulierung der Theorie die folgenden Möglichkeiten gegeben:

- Man erhält Lorentz- und Eichinvarianz.
 - Dann hat man anstelle von A_{μ} die Feldstärke $F_{\mu\nu}$ und andere streng eichinvariante Größen zu verwenden. In diesem Fall muß man die Lokalität der Wechselwirkung aufgeben und $F_{\mu\nu}$ geeignet einsetzen. (S. Mandelstam 62)

1.3. DAS ELEKTROMAGNETISCHE FELD

Man bricht Lorentz- und Eichinvarianz.
 Z.B. mit einer Eichbedingung der Form

$$\nabla \underline{A} = 0 \tag{1.3.17}$$

(Coulomb-Eichung). S. Bjorken/Drell II, Kap. 14. Die Lokalität bleibt ebenfalls erhalten.

- Man bricht die Eich-, erhält aber die Lorentzinvarianz.

Die Lokalität ist dann ebenfalls erhalten. Wir werden im folgenden diesen Weg skizzieren.

Wir addieren also zur eichinvarianten Wirkung (1.3.3) einen eichbrechenden Term:

$$\Gamma = \int \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\partial^{\mu} A_{\mu})^2 \right)$$
(1.3.18)

Die Bewegungsgleichung lautet

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta A^{\lambda}} = (g_{\lambda\mu}\Box - \partial_{\lambda}\partial_{\mu})A^{\mu} + \frac{1}{\alpha}\partial_{\lambda}\partial A , \qquad (1.3.19)$$

die Ward-Identität (1.3.10) geht über in

$$w_{\omega}\Gamma = -\frac{1}{\alpha}\Box\partial A \ . \tag{1.3.20}$$

Die kanonisch konjugierten Impulse sind jetzt durch

$$\pi^{\lambda} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_o A_{\lambda})} = -\frac{1}{\alpha} g^{o\lambda} \partial A - F^{o\lambda}$$
(1.3.21)

gegeben, d.h.

$$\pi^o = -\frac{1}{\alpha} \partial A \neq 0, \tag{1.3.22}$$

$$\pi^{i} = -F^{oi} = \partial^{i} A^{o} - \partial^{o} A^{i}.$$
(1.3.23)

Damit lassen sich kanonische Vertauschungsrelationen postulieren:

1

$$[\pi^{\lambda}(x), A_{\mu}(y)]_{x_{o}=y_{o}} = -i\delta^{\lambda}{}_{\mu}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$
(1.3.24)

$$[A_{\mu}(x), A_{\nu}(y)]_{x_o=y_o} = [\pi_{\mu}(x), \pi_{\nu}(y)]_{x_o=y_o} = 0$$
(1.3.25)

Einsetzen von (1.3.22) in (1.3.24) liefert auf der linken Seite

$$-\frac{1}{\alpha} [\partial A(x), A_{\mu}(y)]_{x_o=y_o} = -\frac{1}{\alpha} [\partial^o A_o + \partial^i A_i, A_{\mu}(y)]_{x_o=y_o}$$

$$= -\frac{1}{\alpha} [\partial^o A_o(x), A_{\mu}(y)]_{x_o=y_o},$$
 (1.3.26)

denn Differentiation in Bezug auf räumliche Argumente ist kompatibel mit $x_o = y_o$. Entsprechend ist (1.3.23) in (1.3.24) eingesetzt

$$[-F^{oi}(x), A_{\mu}(y)]_{x_{o}=y_{o}} = - [\partial^{i}A^{o} - \partial^{o}A^{i}, A_{\mu}(y)]_{x_{o}=y_{o}}$$

= - [\delta^{o}A^{i}(x), A_{\mu}(y)]_{x_{o}=y_{o}}. (1.3.27)

Für die Eichung $\alpha = 1$ lassen sich (1.3.26) und (1.3.27) mit der rechten Seite von (1.3.24) zu

$$[\dot{A}_{\mu}(x), A_{\nu}(y)]_{x_{o}=y_{o}} = ig_{\mu\nu}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$
(1.3.28)

zusammenfassen. D.h. für die räumlichen Komponenten $\mu = \nu = 1, 2, 3$ haben wir Vertauschungsrelationen wie für drei skalare Felder. Für die zeitlichen Komponenten $\mu = \nu = 0$ haben wir jedoch ein anderes Vorzeichen. Damit werden die entsprechenden Erzeuger und Vernichter zu Zuständen mit negativer Norm führen; wir müssen also mit Schwierigkeiten bei der Konstruktion eines Hilbertraumes (d.h. eines Raumes mit positiv definiter Metrik) rechnen. Ehe wir diese angehen, wollen wir aber die Feldgleichung lösen und den Kommutator für allgemeines Argument sowie den Propagator berechnen.

In voller Analogie zum Spinorfeld hat die allgemeine Lösung der Feldgleichung (1.3.19) für $\alpha = 1$ die Form

$$A_{\mu}(x) = \int d^{3}k \left(\frac{e^{-ikx}}{\sqrt{(2\pi)^{3}2k_{o}}} \sum_{\lambda=0}^{3} \varepsilon_{\mu}^{(\lambda)}(k) a^{(\lambda)}(k) + \frac{e^{ikx}}{\sqrt{(2\pi)^{3}2k_{o}}} \sum_{\lambda=0}^{3} \varepsilon_{\mu}^{(\lambda)}(k) a^{\dagger(\lambda)}(k) \right)$$
(1.3.29)

 $k_o = |\mathbf{k}|$

Und zwar entsprechen die $a^{(\lambda)}(k)$ den Entwicklungskoeffizienten $b^s(k)$ und $d^s(k)$, während die Polarisationsvektoren $\varepsilon_{\mu}^{(\lambda)}(k)$ den Spinoren u(k, s) und v(k, s) analog sind. Die Polarisationsvektoren sind so zu wählen, daß sie dem besonderen Charakter von A_{μ} gerecht werden: als masseloses Feld (mit Spin eins) hat es nur zwei physikalische Komponenten – die transversalen, benötigt aber zu einer Lorentzkovarianten (und lokalen) Beschreibung deren vier.

Eine Wahl, die alle diese Forderungen erfüllt, ist die folgende.

Ein zeitartiger Einheitsvektor n_{μ} sei fest vorgegeben und definiere die Zeitachse

$$n^2 = 1 \qquad n^o > 0. \tag{1.3.30}$$

Dann sollen die transversalen Polarisationsvektoren $\varepsilon_{\mu}^{(1)}, \varepsilon_{\mu}^{(2)}$ orthogonal zu k und zu n sein, zueinander orthogonal, normiert und raumartig

$$g^{\mu\nu}\varepsilon^{(\lambda)}_{\mu}(k)\varepsilon^{(\lambda')}_{\nu}(k) = -\delta_{\lambda\lambda'} \qquad \lambda, \lambda' = 1, 2.$$
(1.3.31)

Der longitudinale Polarisationsvektor $\varepsilon_{\mu}^{(3)}$ liege in der (k, n)-Ebene, sei senkrecht zu n, raumartig und normiert

$$g^{\mu\nu}\varepsilon^{(3)}_{\mu}(k)n_{\nu} = 0, \qquad g^{\mu\nu}\varepsilon^{(3)}_{\mu}(k)\varepsilon^{(3)}_{\nu}(k) = -1.$$
 (1.3.32)

Der vierte ("skalare") Polarisationsvektor $\varepsilon_{\mu}^{(o)}$ wird mit n_{μ} zusammenfallend gewählt.

$$\varepsilon_{\mu}^{(o)} = n_{\mu}.\tag{1.3.33}$$

Für $n^o=1$ und Wellenvektor ${\bf k}$ parallel zur z-Achse ergeben sich gerade die Einheitsvektoren

$$\varepsilon^{(o)} = \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon^{(1)} = \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon^{(2)} = \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon^{(3)} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix}.$$

Für allgemeinen Impuls k folgen sie durch das Studium der Helizitätsbasis und der kleinen Gruppe (s. Gasiorowicz S. 59). Sie sind so konstruiert, daß sie orthogonal

$$g^{\mu\nu}\varepsilon^{(\lambda)}_{\mu}(k)\varepsilon^{(\lambda')*}_{\nu}(k) = g^{\lambda\lambda'}$$
(1.3.34)

und vollständig sind

$$\sum_{\lambda} \frac{\varepsilon_{\mu}^{(\lambda)}(k)\varepsilon_{\nu}^{(\lambda)*}(k)}{g^{\rho\sigma}\varepsilon_{\rho}^{(\lambda)}(k)\varepsilon_{\sigma}^{(\lambda)*}(k)} = g_{\mu\nu}.$$
(1.3.35)

Als Vertauschungsrelationen für die Erzeuger und Vernichter ergeben sich damit

$$[a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda')\dagger}(k')] = -g^{\lambda\lambda'}\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$
(1.3.36)

Für die Felder läßt sich dann der Kommutator zu allgemeinem Argument berechnen

$$[A_{\mu}(x), A_{\nu}(y)] = -ig_{\mu\nu}\Delta(x - y; 0)$$
(1.3.37)

Hierin ist $\Delta(x - y; 0)$ die Kommutatorfunktion des reellen skalaren Feldes mit Masse null. Der Propagator folgt aus der Inversionsforderung

$$\Box \Delta^c_{\mu\nu}(x) = i\delta(x)g_{\mu\nu} \tag{1.3.38}$$

 $(\Delta_c(x; 0)$ ist der Propagator des reellen skalaren Feldes mit Masse null.). In der allgemeinen Eichung lautet diese Bedingung

 $\Delta^c_{\mu\nu}(x) = -g_{\mu\nu}\Delta_c(x;0)$

$$\left(g_{\lambda\mu}\Box - (1 - \frac{1}{\alpha})\partial_{\lambda}\partial_{\mu}\right)\Delta_{c}^{\mu\nu} = i\delta(x)\delta_{\lambda}^{\nu} \qquad (1.3.40)$$

und ihre Lösung (im Fourierraum)

$$\tilde{\Delta}^{c}_{\mu\nu}(k) = \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^{2}}\right)\frac{-i}{k^{2} + i\varepsilon} + \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^{2}}\frac{-i\alpha}{k^{2} + i\varepsilon}.$$
(1.3.41)

(1.3.39)

Bei der Berechnung von $\Delta_{\mu\nu}^c$ über das *T*-Produkt

$$\Delta^{c}_{\mu\nu} = \langle TA_{\mu}(x)A_{\nu}(y)\rangle$$

= $\theta(x^{o} - y^{o})\langle A_{\mu}(x)A_{\nu}(y)\rangle + \theta(x^{o} - y^{o})\langle A_{\nu}(y)A_{\mu}(x)\rangle$ (1.3.42)

können für zusammenfallende Argumente $x^o = y^o$ nicht-kovariante Terme auftauchen. Sie wegzulassen ist eine erlaubte Definition des *T*-Produktes; denn für zusammenfallende Argumente ist es ja a priori gar nicht definiert.

Wir haben nun noch die Frage zu diskutieren, wie die überflüssigen Freiheitsgrade (skalar + longitudinal) zu eliminieren sind. Klassisch stellt die Lorentzbedingung

$$\partial^{\mu}A_{\mu} = 0 \tag{1.3.43}$$

eine Randbedingung für die Lösung der Differentialgleichung

$$\Box A_{\mu} = 0 \tag{1.3.44}$$

 $\operatorname{dar.}$

In die quantisierte Theorie kann (1.3.43) nicht als Operatorgleichung übernommen werden, denn sonst gerät man sofort in Widerspruch zur kanonischen Quantisierung (1.3.37):

$$0 = [\partial^{\mu} A_{\mu}(x), A_{\nu}(y)] = -i\partial_{\nu}\Delta(x-y) \neq 0$$
 (1.3.45)

Einen Ausweg aus diesem Dilemma weist (1.3.20) : $\partial^{\mu}A_{\mu}$ ist ein freies Feld (und zwar – wie wir später sehen werden – auch in der wechselwirkenden Theorie). Daher kann man den Zuständen eine Einschränkung auferlegen. Die Forderung

$$\partial^{\mu}A^{(-)}_{\mu}|phys\rangle = 0 \tag{1.3.46}$$

erweist sich als widersprüchlich: für das Vakuum folgt sofort

$$\langle o|\partial^{\nu} A_{\nu}^{(+)} \partial^{\mu} A_{\mu}^{(-)}|o\rangle = \langle o|[\partial^{\nu} A_{\nu}^{(+)}, \partial^{\mu} A_{\mu}^{(-)}]|o\rangle = 0$$
(1.3.47)

während die Berechnung des Kommutators ein nicht-verschwindendes Ergebnis liefert. Hingegen erscheint

$$\partial^{\mu}A^{(+)}_{\mu}|phys\rangle = 0 \tag{1.3.48}$$

als möglich, denn dann ist die Lorentzbedingung für Amplituden erfüllt:

$$\langle phys_1|\partial^{\mu}A_{\mu}|phys_2\rangle = (\langle phys_1|\partial^{\mu}A_{\mu}^{(-)})|phys_2\rangle = 0$$
(1.3.49)

In der Tat ist die Bedingung (1.3.48) linear im Feld A. Dann kann im Fock-Raum die Basis der Produkte der Erzeuger so gewählt werden, daß Faktorisierung eintritt:

$$|\psi\rangle = |\psi_T\rangle|\phi\rangle \tag{1.3.50}$$

1.3. DAS ELEKTROMAGNETISCHE FELD

(in ψ_T tragen nur transversale, in ϕ nur longitudinale und skalare Erzeuger bei). Diese Zerlegung ist zwar abhängig von der Wahl der $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}$, aber dann eindeutig. Die Wirkung von $i\partial^{\mu}A^{(+)}_{\mu}$ auf $|\phi\rangle$ ist nun folgendermaßen

$$i\partial^{\mu}A_{\mu}^{(+)}|\phi\rangle = \int d^{3}k \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{(2\pi)^{3}2k_{o}}} \sum_{\lambda=0,3} \varepsilon_{\mu}^{(\lambda)}k^{\mu}a^{(\lambda)}(k)|\phi\rangle$$

$$(\text{denn} \quad \varepsilon_{\mu}^{(\lambda)}k^{\mu} = 0 \quad \text{für} \quad \lambda = 1, 2)$$

$$= \int d^{3}k \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{(2\pi)^{3}2k_{o}}} \left(k_{o}a^{(o)}(k) - |\mathbf{k}|a^{(3)}(k)\right)|\phi\rangle$$

$$(1.3.51)$$

d.h.

Ebenso

$$i\partial^{\mu}A_{\mu}^{(+)}|\phi\rangle = 0 \qquad \text{heißt} \qquad (1.3.52)$$

$$\left(a^{(o)}(k) - a^{(3)}(k)\right)|\phi\rangle = 0.$$
(1.3.53)

$$\langle \phi | \left(a^{(o)\dagger}(k) - a^{(3)\dagger}(k) \right) = 0 .$$
 (1.3.54)

$$\langle \phi | a^{(o)\dagger}(k) a^{(o)}(k) - a^{(3)\dagger}(k) a^{(3)}(k) | \phi \rangle = 0$$
 (1.3.55)

D.h. in ϕ ist die Anzahl von skalaren Photonen gleich der Anzahl der longitudinalen Photonen.

Am Beispiel der Energie lassen sich diese Überlegungen leicht illustrieren.

$$H = \int d^{3}x : \pi^{\mu}\dot{A}_{\mu} - \mathcal{L}:$$

$$H = \frac{1}{2} \int d^{3}x \left(\sum_{i=1}^{3} (\dot{A}_{i}^{2} + (\nabla A_{i})^{2}) - \dot{A}_{o}^{2} - (\nabla A_{o})^{2} \right)$$

$$H = \int d^{3}k\omega_{k} \left(\sum_{\lambda=1}^{3} a^{(\lambda)\dagger}(k)a^{(\lambda)}(k) - a^{(o)\dagger}(k)a^{(o)}(k) \right)$$
(1.3.57)

Der Vakuumerwartungswert von H verschwindet wegen der Normalordnung

$$\langle o|H|o\rangle = 0 \tag{1.3.58}$$

Für den Erwartungswert in bezug auf einen beliebigen Zustand gilt mit (1.3.55)

$$\langle \psi | H | \psi \rangle = \langle \psi_T | \int d^3k \ \omega_k \sum_{\lambda=1,2} a^{(\lambda)\dagger}(k) a^{(\lambda)}(k) | \psi_T \rangle$$
(1.3.59)

d.
h nur die transversalen "Anteile" in $|\psi\rangle$ sind relevant und tragen zum Erwartungswert der Energie bei.

Die Sonderrolle, die $a^{(o)}(k)$ auf Grund seiner Vertauschungsrelation

$$[a^{(o)}(k), a^{(o)\dagger}(k')] = -\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$
(1.3.60)

spielt (d.h. das negative Vorzeichen), macht auch eine Redefinition des Skalarproduktes im Hilbertraum notwendig. Wir wollen dieses Problem hier jedoch nicht weiter verfolgen, sondern verweisen auf die Literatur (Bogoliubov/Shirkov S.131; Schweber S.245).

1.4 Das erzeugende Funktional für die freien Greenschen Funktionen

Eine fundamentale Rolle in der Formulierung einer Quantenfeldtheorie spielen die Vakuumerwartungswerte zeitgeordneter Produkte von Feldoperatoren

$$G(x_1, \dots, x_n) = \langle T(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)) \rangle \tag{1.4.1}$$

die Greenschen Funktionen. Hierbei ist das zeitgeordnete Produkt zunächst naiv definiert als

$$T(\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)) = \theta(x_{\pi(1)}^o)\dots\theta(x_{\pi(n)}^o)\langle\varphi(x_{\pi(1)})\cdots\varphi(x_{\pi(n)})\rangle$$
(1.4.2)

wenn $\pi(1) \dots \pi(n)$ diejenige Permutation von x_1, \dots, x_n ist, für die

$$x^o_{\pi(1)} \ge \dots \ge x^o_{\pi(n)} \tag{1.4.3}$$

gilt. Um mit allen Greenschen Funktionen als Gesamtheit umgehen zu können, ist es zweckmäßig, ein sie *erzeugendes Funktional* einzuführen:

$$Z(J) = \langle Te^{i \int dx \varphi(x) J(x)} \rangle$$

= $\sum_{n} \frac{i^{n}}{n!} \int dx_{1} \dots dx_{n} \langle T(\varphi(x_{1}) \dots \varphi(x_{n})) \rangle J(x_{1}) \dots J(x_{n})$ (1.4.4)

Differentiation nach den Quellen J(x) – das sind hinreichend glatte, beliebige Funktionen mit beschränktem Träger auf der Raum-Zeit – liefert die jeweils interessierende Greensche Funktion:

$$G(x_1 \dots x_n) = \frac{\delta}{i\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{i\delta J(x_n)} Z(J)\Big|_{J=0}$$
(1.4.5)

Sind die Operatoren $\varphi(x)$ freie Felder, wie wir sie in den vorhergehenden Abschnitten behandelt haben, dann schreiben wir für das erzeugende Funktional

$$Z = Z_o(J) = \langle T e^{i \int dx \varphi(x) J(x)} \rangle \tag{1.4.6}$$
1.4. DAS ERZEUGENDE FUNKTIONAL FÜR DIE FREIENGREENSCHEN FUNKTIONEN29

für $(\Box + m^2)\varphi(x) = 0$ (das Beispiel des freien skalaren Feldes). Ziel der Theorie ist es, für Z(J) eine explizite Form zu finden. Für die freie Theorie gelingt das. Wir wollen im folgenden beweisen, daß

$$Z_o(J) = e^{-\frac{1}{2}\int dx_1 dx_2 J(x_1)\Delta_c(x_1 - x_2)J(x_2)}$$
(1.4.7)

gilt. Hierbei ist Δ_c der Propagator (1.1.53) des freien skalaren Feldes, der die Gleichung

$$(\Box + m^2)\Delta_c = -i\delta(x) \tag{1.4.8}$$

erfüllt und durch die Randbedingungen

 Δ_c : enthält nur positive Frequenzen für $t \to +\infty$

 Δ_c : " " negative " " $t\to -\infty$ e
indeutig bestimmt ist. Es gilt sogar allgemeiner der folgende Zusammenhang. Die Gleichung

$$(\Box + m^2)F(x) = f(x)$$
(1.4.9)

wird gelöst von

$$F(x) = i \int dy \Delta(x - y) f(y) \qquad (1.4.10)$$

und Δ ist identisch mit Δ_c , falls F nur positive Frequenzen für $t \to +\infty$ und nur negative Frequenzen für $t \to -\infty$ enthält.

Wir betrachten nun

$$\frac{\delta}{i\delta J(x)}Z_o(J) = \langle T\varphi(x)e^{i\int J\varphi}\rangle \tag{1.4.11}$$

Es sei $t \equiv x_o$; wegen der Zerlegung (1.1.12) gilt dann, daß $\langle T\varphi(x)e^{i\int J\varphi} \rangle \xrightarrow{t \to +\infty} \langle \varphi(x)Te^{i\int J\varphi} \rangle$ und nur positive Frequenzen enthält, während $\langle T\varphi(x)e^{i\int J\varphi} \rangle \xrightarrow{t \to -\infty} \langle e^{i\int J\varphi}\varphi(x) \rangle$ und nur negative Frequenzen enthält. Schreibt man die Zeitordnung in der Form

$$\langle T\varphi(x)e^{i\int J\varphi}\rangle = \langle T\left(e^{i\int_t^\infty dt'J\varphi}\right)\varphi(\mathbf{x},t)T\left(e^{i\int_{-\infty}^t dt''J\varphi}\right)\rangle$$
(1.4.12)

so läßt sich auch die Differentiation nach t ausführen :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle T\varphi(x)e^{i\int J\varphi} \rangle = \left\langle T\left(e^{i\int_t^\infty dt'J\varphi}\right) \dot{\varphi}(\mathbf{x},t) T\left(e^{i\int_{-\infty}^t dt''J\varphi}\right) - T\left(e^{i\int_t^\infty dt'J\varphi}\right) \int d^3x_1 i J(x_1)[\varphi(\mathbf{x}_1,t),\varphi(\mathbf{x},t)] \times (1.4.13) \times T\left(e^{i\int_{-\infty}^t dt''J\varphi}\right) \right\rangle$$

(der Kommutatorbeitrag rührt von der Differentiation der Zeitintegrale nach deren unterer bzw. oberer Grenze her) .

Mit den kanonischen Vertauschungsrelationen (1.1.21)–(1.1.22) folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle T\varphi(x)e^{i\int J\varphi} \rangle = \left\langle T\left(e^{i\int_t^\infty dt'J\varphi}\right) \dot{\varphi}(\mathbf{x},t) T\left(e^{i\int_{-\infty}^t dt''J\varphi}\right) \right\rangle$$
(1.4.14)

Analog gilt für die zweite Ableitung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle T\varphi(x)e^{i\int J\varphi} \rangle = \left\langle T\left(e^{i\int_t^\infty dt'J\varphi}\right) \ddot{\varphi}(\mathbf{x},t) T\left(e^{i\int_{-\infty}^t dt''J\varphi}\right) + T\left(e^{i\int_t^\infty dt'J\varphi}\right) \int d^3x_1(-i)J(x_1)[\varphi(\mathbf{x}_1,t),\dot{\varphi}(\mathbf{x},t)] \times (1.4.15) \times T\left(e^{i\int_{-\infty}^t dt''J\varphi}\right) \right\rangle$$

 oder

$$(\Box + m^{2}) \langle T\varphi(x)e^{i\int J\varphi} \rangle = \left\langle T\left(e^{i\int_{t}^{\infty} dt'\varphi}\right) \right) (\Box + m^{2})\varphi(\mathbf{x}, t)T\left(e^{i\int_{-\infty}^{t} dt''J\varphi}\right) \right\rangle + \left\langle T\left(e^{i\int_{t}^{\infty} dt'J\varphi}\right) J(x)T\left(e^{i\int_{-\infty}^{t} dt''J\varphi}\right) \right\rangle = 0 + J(x)Z_{o}(J)$$
(1.4.16)

Damit haben wir gezeigt

$$(\Box + m^2)\frac{\delta}{i\delta J(x)}Z_o(J) = J(x)Z_o(J)$$
(1.4.17)

oder auch

$$(\Box + m^2) \frac{1}{Z_o(J)} \frac{\delta}{i\delta J(x)} Z_o(J) = J(x).$$
(1.4.18)

Mit den Frequenzeigenschaften wie oben erwähnt, folgt

$$\frac{1}{Z_o(J)}\frac{\delta}{i\delta J(x)}Z_o(J) = i\int dy\Delta_c(x-y)J(y)$$
(1.4.19)

und damit

$$Z_o(J) = e^{-\frac{1}{2}\int dx dy J(x)\Delta_c(x-y)J(y)}$$
(1.4.20)

wie behauptet.

Im nachfolgenden Abschnitt werden wir noch eine inhaltliche Interpretation für $Z_o(J)$ und damit auch eine andere Herleitung für (1.4.20) finden.

Der Vollständigkeit halber wollen wir die für ein skalares Feld angegeben Formeln verallgemeinern für den Fall von Vektor- und Spinorfeldern.

Definieren wir analog zu (1.4.4) das erzeugende Funktional für Greensche Funktionen von Vektorfeldern gemäß

$$Z(J_{\mu}) = \langle Te^{i\int dx A^{\mu}(x)J_{\mu}(x)} \rangle$$

= $\sum_{n} \frac{1}{n!} \int dx_{1} \dots dx_{n} \langle T(A_{\mu_{1}}(x_{1}) \dots A_{\mu_{n}}(x_{n})) \rangle J^{\mu_{1}}(x_{1}) \dots J^{\mu_{n}}(x_{n}), \quad (1.4.21)$

so folgt für das Funktional der freien Greenschen Funktionen

$$Z_o(J_\mu) = e^{-\frac{1}{2}\int dx dy J^\mu(x)\Delta^c_{\mu\nu}(x-y)J^\nu(y)}, \qquad (1.4.22)$$

wobei der Propagator für masselose Vektoren in (1.3.40), für massive Vektoren im Abschnitt 9.2 angegeben ist.

Wenn wir die Greenschen Funktionen für Spinorfelder ebenfalls durch Differentiation nach äußeren Quellen gewinnen wollen, so müssen wir berücksichtigen, daß die Spinoren im T-Produkt *anti*-kommutieren:

$$\langle T(\psi_{\beta}(y)\bar{\psi}_{\alpha}(x))\rangle = -\langle T(\bar{\psi}_{\alpha}(x)\psi_{\beta}(y))\rangle$$
(1.4.23)

Wir definieren also analog zum bosonischen Fall

$$Z(\eta,\bar{\eta}) = \langle T e^{i \int dx(\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)} \rangle$$
(1.4.24)

mit den Regeln

$$\{\eta(x), \eta(y)\} = \{\bar{\eta}(x), \bar{\eta}(y)\} = \{\eta(x), \bar{\eta}(y)\} = \{\bar{\eta}(x), \eta(y)\} = 0$$
(1.4.25)

und

$$\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\frac{\delta}{\delta\eta(y)} = -\frac{\delta}{\delta\eta(y)}\frac{\delta}{\delta\eta(x)},\tag{1.4.26}$$

$$\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(y)} = -\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(y)}\frac{\delta}{\delta\eta(x)} \qquad \text{usw.} \tag{1.4.27}$$

Dann ergibt sich z.B. eine allgemeine Greensche Funktion gemäß

$$\langle T(\bar{\psi}(x_1)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\psi(x_2)\dots\bar{\psi}(x_n)\psi(x_n)\bar{\psi}(y_1)\dots\bar{\psi}(y_m)\psi(z_1)\dots\psi(z_k))\rangle$$

$$= i\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(z_k)}\cdots i\frac{\delta}{\delta\eta(y_1)}\cdots i\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x_1)}i\frac{\delta}{\delta\eta(x_1)}Z\Big|_{\eta=\bar{\eta}=0}$$

$$(1.4.28)$$

(alle Ableitungen wirken von links).

Das Funktional der freien Greenschen Funktionen hat demnach die Gestalt

$$Z_o(\eta, \bar{\eta}) = e^{-\int dy dx \bar{\eta}(y) i S_c(y-x) \eta(x)}$$
(1.4.29)

so daß z.B.

$$i\frac{\delta}{\delta\eta(x)}i\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(y)}Z_o(\eta,\bar{\eta})\Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} = i S_c(y-x)$$
(1.4.30)

(s. (1.2.77)) ergibt.

Für Majorana-Spinoren hat man zu bedenken, daß $\bar{\psi}_M$ und ψ_M nicht unabhängig voneinander sind, so daß im Exponenten von (1.4.29) ein zusätzlicher Faktor $\frac{1}{2}$ auftritt.

1.5 Bibliographische Angaben

Die kanonische Quantisierung wird in sehr vielen Lehrbüchern ausführlich behandelt und ist deswegen hier kurz gefaßt. Für die Felder mit Spin 0, 1/2 haben wir Bjorken/Drell II, für das elektromagnetische Feld Bogoliubov/Shirkov, Gasiorowicz und Schweber zu Rate gezogen. Weyl-Spinoren werden am häufigsten im Zusammenhang mit der Supersymmetrie diskutiert. Unsere Konventionen sind aus naheliegenden Gründen die von Piguet/Sibold.

Kapitel 2

Wechselwirkung

2.1 Die S-Matrix

2.1.1 Definition und allgemeine Betrachtungen

Bisher haben wir den Fockraum (genauer: den Hilbertraum) der Zustände freier Teilchen konstruiert. Die eingeführten Observablen waren alle vom Typ $f(p)a^{\dagger}(p)a(p) - d.h.$ Anzahloperatoren. Sie "messen" Energie-, Impuls-, Ladungsgehalt in (Summen von) Zuständen. Gesucht werden nunmehr Größen, die die Wechselwirkung von Teilchen beschreiben, d.h. Streuung, Erzeugung und Vernichtung von Teilchen – eine Beschreibung ihrer Dynamik. Wir werden hierzu die Grundannahme der Störungstheorie machen, nämlich, daß es zur Beschreibung realistischer Situationen ausreicht, den Hilbertraum (oder den Fockraum) freier Teilchen zu kennen; daß also alle Prozesse als Übergang von einer Basis des freien Fockraumes in eine andere betrachtet werden können:

$$\Phi_{ein} \to \Phi_{aus} , \qquad (2.1.1)$$

daß also ein unitärer Operator S (Streu-Matrix) existiert mit

$$\Phi_{ein} = S^{-1} \Phi_{aus} , \qquad (2.1.2)$$

$$S^{\dagger}S = SS^{\dagger} = \mathbf{1} . \tag{2.1.3}$$

So plausibel eine solche Annahme auch erscheinen mag, so klar muß man sich darüber sein, daß sie eine starke Idealisierung darstellt und (mindesten) die folgenden Defekte hat :

- die Bildung von Bindungszuständen wird vernachlässigt,
- für langreichweitige Kräfte (z.B elektromagnetische) treten Schwierigkeiten auf,

- die ständige Wechselwirkung von Teilchen mit dem Vakuum (eine typische Eigenschaft der Quantenfeldtheorie) wird nicht berücksichtigt.

Ungeachtet dieser Idealisierung ist die Störungstheorie bisher recht erfolgreich gewesen und lohnt die Mühe ihrer sorgfältigen Formulierung.

Wir wollen zunächst zeigen, wie aus der Forderung der relativistischen Invarianz von Übergangswahrscheinlichkeiten die entsprechende der S-Matrix folgt. Die Wahrscheinlichkeitsamplitude des Übergangs $\Phi_{ein} \rightarrow \Psi_{aus}$ ist gegeben durch

$$(\Psi_{aus}, \Phi_{ein}) = (\Psi_{ein}, S^{-1}\Phi_{ein}) = (\Psi_{aus}, S^{-1}\Phi_{aus})$$
 (2.1.4)

Unter Poincaré-Transformationen (mit Translation a, Lorentztransformation Λ) gehen die ein-aus-Basen in neue über

$$\Phi_{ein} \to \Phi_{ein}^{(a,\Lambda)} = U_{ein}(a,\Lambda)\Phi_{ein} , \qquad (2.1.5)$$

$$\Phi_{aus} \to \Phi_{aus}{}^{(a,\Lambda)} = U_{aus}(a,\Lambda)\Phi_{aus} .$$
(2.1.6)

Wir fordern, daß die Übergangswahrscheinlichkeiten erhalten bleiben sollen:

$$| (\Psi_{aus}^{(a,\Lambda)}, \Phi_{ein}^{(a,\Lambda)} | = | (\Psi_{aus}, U_{aus}^{-1}(a,\Lambda)U_{ein}(a,\Lambda)\Phi_{ein} |$$
(2.1.7)

Es ist nun der Inhalt des Satzes von Wigner, daß

$$U_{aus}^{-1}(a,\Lambda)U_{ein}(a,\Lambda) = \mathbf{1} \qquad \text{mod Phase}$$
(2.1.8)

und sich nach geeigneter Phasenwahl

$$U_{aus}(a,\Lambda) = U_{ein}(a,\Lambda) \equiv U(a,\Lambda)$$
(2.1.9)

definieren läßt. Hiermit folgt

$$(\Psi_{ein}^{(a,\Lambda)}, S^{-1}\Phi_{ein}^{(a,\Lambda)}) = (\Psi_{ein}, S^{-1}\Phi_{ein}) , \qquad (2.1.10)$$

also

$$U^{\dagger}(a,\Lambda)S^{-1}U(a,\Lambda) = S^{-1} , \qquad (2.1.11)$$

da die ein-Felder jeweils eine Basis bilden

$$[S, U(a, \Lambda] = 0. (2.1.12)$$

Die S-Matrix ist relativistisch invariant.

Die nächste Eigenschaft, die wir von S fordern wollen, ist die Kausalität. Um sie zu formulieren, betrachten wir noch einmal das freie skalare Feld φ . Die Zustände, die es erzeugt, betonen den Teilchencharakter, während sein Wellencharakter unterstrichen wird in seiner Schreibweise als Feld. Dies hat insbesondere zu tun mit

2.1. DIE S-MATRIX

der Kausalität raumzeitlicher Ausbreitung. Wir haben in (1.1.42) die Kommutatorfunktion Δ

$$[\varphi(x),\varphi(y)] = i\Delta(x-y) \tag{2.1.13}$$

bestimmt. Eine Auswertung von (1.1.46) im Ortsraum zeigt, daß

$$\Delta(x-y) = 0 \qquad \text{für} \qquad (x-y)^2 < 0 \qquad (2.1.14)$$

d.h. für raumartiges Argument. Hierfür schreiben wir im folgenden $x\sim y$. Wenn wir uns nun die Entwicklung (1.1.8) für $\varphi(x)$ dadurch zustandegekommen vorstellen, daß für

$$\varphi(f) = \int \varphi(x) f(x) dx \qquad (2.1.15)$$

die Funktion f(x) mit beschränktem Träger gegen die ebene Welle $\frac{e^{-ikx}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}$ gestrebt war und daß die Lorentzkovarianz für $\varphi(f)$ sich ausdrückt als

$$\varphi(f^{(a,\Lambda)}) = U(a,\Lambda)\varphi(f)U^{-1}(a,\Lambda) \quad \text{mit}$$
(2.1.16)

$$f^{(a,\Lambda)}(x) = f(\Lambda^{-1}(x-a)) , \qquad (2.1.17)$$

dann ist es einleuchtend, daß sich die Kausalität für $\varphi(f)$ folgendermaßen ausdrücken läßt:

$$[\varphi(f),\varphi(g)] = 0 \qquad \text{für supp } f \sim \text{supp } g \qquad (2.1.18)$$

(f, g :zwei beliebige Funktionen mit beschränktem Träger.)

Zur Formulierung der weiteren Bedingungen an S ist es zweckmäßig, eine Quelle J(x) einzuführen, die an einen elementaren oder zusammengesetzten Operator koppeln soll und wie die Testfunktionen f oder g geeignete Trägereigenschaften haben kann. Gesucht wird ein Funktional S(J) mit den folgenden Eigenschaften:

1.
$$S(J) = \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n T_n(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n)$$
 (2.1.19)

S ist eine formale Reihe in J(x), insbesondere S = 1 für J = 0; die $T_n(x_1, \ldots, x_n)$ sind Operatoren im Fockraum.

2. S(J) ist kovariant in bezug auf Lorentztransformationen

$$U(a,\Lambda)S(J)U^{-1}(a,\Lambda) = S(J^{(a,\Lambda)})$$

$$J^{(a,\Lambda)}(x) = J(\Lambda^{-1}(x-a))$$
(2.1.20)

3. S(J) ist kausal

$$S(J_1 + J_2) = S(J_2)S(J_1) \qquad \text{für supp } J_2 \gtrsim \text{supp } J_1 \qquad (2.1.21)$$

Hierbei bedeutet $supp J_2 > supp J_1$, daß die Punkte von $supp J_2$ streng zeitartig zu $supp J_1$ liegen und zwar in Vorwärtsrichtung. Da $supp J_2 \sim supp J_1$ wie oben bedeutet, daß die Punkte von $supp J_2$ relativ zu $supp J_1$ raumartig sind, ist eine äquivalente Charakterisierung die folgende. Bezeichnet \bar{V}_1^- die Vereinigung der abgeschlossenen Rückwärtslichtkegel der Punkte von $supp J_1$, dann gilt $supp J_2 \gtrsim$ $supp J_1$ gerade für die Punkte, für die

$$supp \ J_2 \cap (supp \ J_1 \cup \overline{V}_1^-) = \emptyset$$
.

D.h. die Wechselwirkungen in $supp J_2$ wirken sich nicht auf $supp J_1$ oder dessen Vergangenheit aus. Für einen Zustandsvektor formuliert:

$$\Phi_t = S(J_1)\Phi \tag{2.1.22}$$

$$\Phi_{\infty} = S(J_2)\Phi_t = S(J_2)S(J_1)\Phi$$
(2.1.23)

$$\Phi_{\infty} = S(J_2 + J_1)\Phi \tag{2.1.24}$$

Die Zeitentwicklung gemäß der Wechselwirkung von J_2 verläuft nach dem Resultat der Wechselwirkung durch die Quelle J_1 und entspricht der beider Quellen zusammen betrachtet.

4. S ist unitär

$$S(J)S^{\dagger}(J) = S^{\dagger}(J)S(J) = \mathbf{1}$$
(2.1.25)

Für spätere Anwendungen wollen wir einige einfache Folgerungen aus den Axiomen angeben. Wir berechnen zunächst die Ordnung zwei in J in (2.1.21) wobei wir (2.1.19) benutzen:

$$1 + i \int T_1(J_1 + J_2) + \frac{i^2}{2!} \int T_2(J_1 + J_2)^2$$

= $(1 + i \int T_1 J_1 + \frac{i^2}{2!} \int T_2 J_1 J_1)(1 + i \int T_1 J_2 + \frac{i^2}{2!} \int T_2 J_2 J_2)$
d.h. (2.1.26)

$$\frac{i^2}{2!}2\int T_2 J_1 J_2 = i^2 \int T_1 J_1 \int T_1 J_2$$

Die Kausalität sagt also aus:

$$T_2(x_1, x_2) = \begin{cases} T_1(x_1)T_1(x_2) & x_1 \gtrsim x_2 \\ T_1(x_2)T_1(x_1) & x_2 \gtrsim x_1 \end{cases}$$
(2.1.27)

2.1. DIE S-MATRIX

Im Überlappbereich der Argumente x_1, x_2 (wenn $x_1 \sim x_2$, ist auch $x_2 \sim x_1$ richtig) gilt also

$$[T_1(x_1), T_1(x_2)] = 0 \qquad \text{für} \qquad (x_1 - x_2)^2 < 0 \qquad (2.1.28)$$

Die relativistische Kovarianz (2.1.20) impliziert

$$U(a,\Lambda)T_1(x)U^{-1}(a,\Lambda) = T_1(\Lambda x + a), \qquad (2.1.29)$$

die Unitarität (J ist reell) :

$$T_1(x) = T_1^{\dagger}(x). \tag{2.1.30}$$

2.1.2 Beispiele

Die einfachste Lösung aller dieser Bedingungen ist gerade

$$T_1(x) = \varphi(x). \tag{2.1.31}$$

Bevor wir allgemeinere Lösungen diskutieren, wollen wir dieses Beispiel noch etwas weiterverfolgen. Einsetzen von 2.1.31) in 2.1.27) ergibt

$$T_2(x_1, x_2) = \begin{cases} \varphi(x_1)\varphi(x_2) & \text{für}x_1 \gtrsim x_2\\ \varphi(x_2)\varphi(x_1) & \text{für}x_2 \gtrsim x_1 \end{cases}$$
(2.1.32)

Wir benutzen nun das Wick-Produkt (vgl. Abschnitt 2.2.1) der Operatoren $\varphi(x_1)\varphi(x_2)$:

$$:\varphi(x_1)\varphi(x_2):=\varphi(x_1)\varphi(x_2)-\langle\varphi(x_1)\varphi(x_2)\rangle$$
(2.1.33)

und die Tatsache, daß es kommutativ ist

$$:\varphi(x_1)\varphi(x_2) := :\varphi(x_2)\varphi(x_1):$$
(2.1.34)

(Beweis durch Ausmultiplizieren und Anwenden der Regel "Vernichter nach rechts", "Erzeuger nach links") und erhalten

$$T_2(x_1, x_2) = \begin{cases} : \varphi(x_1)\varphi(x_2) : +\langle \varphi(x_1)\varphi(x_2) \rangle & \text{für } x_1 \gtrsim x_2 \\ : \varphi(x_1)\varphi(x_2) : +\langle \varphi(x_2)\varphi(x_1) \rangle & \text{für } x_2 \gtrsim x_1 \end{cases}$$
(2.1.35)

bzw. mit Hilfe von (1.1.48) und (1.1.49)

$$T_2(x_1, x_2) =: \varphi(x_1)\varphi(x_2) :+ \begin{cases} i\Delta_+(x_1 - x_2) & \text{für } x_1 \gtrsim x_2 \\ -i\Delta_-(x_1 - x_2) & \text{für } x_2 \gtrsim x_1. \end{cases}$$
(2.1.36)

 $T_2(x_1, x_2)$ ist also mit Ausnahme der Stelle $x_1 = x_2$ überall definiert. Um T_2 für alle Argumente zu definieren, müssen die rechten Seiten von (2.1.36) auf

 $x_1 = x_2$ fortgesetzt werden. Ein Blick in die Tabelle nach Abb. 1.1.2 zeigt, daß eine Fortsetzung der Funktionen $\pm i\Delta_{\pm}$ gerade Δ_C ist, so daß sich die allgemeinste Fortsetzung von dieser nur um $P(\partial)\delta(x_1 - x_2)$ (*P*: Polynom von Ableitungen) unterscheiden kann.

$$T_2(x_1, x_2) =: \varphi(x_1)\varphi(x_2) : +\Delta_c(x_1 - x_2) + P(\partial)\delta(x_1 - x_2), \qquad (2.1.37)$$

Diese Fortsetzung ist ein Vielfaches des Einheitsoperators und ändert daher den "Operatortyp" von $T_2(x_1, x_2)$ nicht ab. Die am wenigsten singuläre Lösung ist

$$P(\partial) = 0 \tag{2.1.38}$$

und diese entspricht gerade

$$T_2(x_1, x_2) = T(\varphi(x_1)\varphi(x_2)), \qquad (2.1.39)$$

mit der Zeitordnung wie definiert in (1.4.3) (nämlich genau der Multiplikation mit $\theta(x_1^o - x_2^o)$ und nicht anderen Funktionen davon). Wir werden in Abschnitt 3.3 genauer darauf eingehen, wie weit diese Willkür in der Festlegung des Wertes von $T_2(x_1, x_2)$ für $x_1 = x_2$ sinnvollerweise gehen kann.

Entsprechend erhält man für die Ordnung n

$$T_n(x_1 \dots x_n) = \varphi(x_{\pi(1)}) \dots \varphi(x_{\pi(n)}) \qquad \text{falls} \quad x_{\pi(1)} \gtrsim x_{\pi(2)} \gtrsim \dots \gtrsim x_{\pi(n)}$$
(2.1.40)

für eine Permutation π von 1...*n*. Die am wenigsten singuläre Lösung lautet

$$T_{n}(x_{1}...x_{n}) = T(\varphi(x_{1})...\varphi(x_{n}))$$

= $\sum_{\pi \in P_{n}} \theta(x_{\pi(1)}^{o} - x_{\pi(2)}^{o})...\theta(x_{\pi(n-1)}^{o} - x_{\pi(n)}^{o})\varphi(x_{\pi(1)})...\varphi(x_{\pi(n)})$
(2.1.41)

und entspricht ebenso unserer naiven Definition der Zeitordnung. Zusammengefaßt lautet also die am wenigsten singuläre Lösung

$$S(J) = T e^{i \int \varphi(x) J(x) dx}$$
(2.1.42)

Um die Behandlung des Beispiels (2.1.31) abzuschließen, wollen wir die Frage beantworten, welches Feld

$$\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(\varphi, J), \tag{2.1.43}$$

so beschaffen ist, daß es in Wechselwirkung mit J(x) gerade die obige S-Matrix liefert. Wir machen den Ansatz

$$\hat{\varphi} = \varphi + O(J), \tag{2.1.44}$$

2.1. DIE S-MATRIX

denn für J=0 soll $\hat{\varphi}$ gerade mit dem freien Feld φ übereinstimmen. Als weitere Bedingungen haben wir

$$\hat{\varphi}^{\dagger} = \hat{\varphi}, \qquad (2.1.45)$$

$$U(a,\Lambda)\hat{\varphi}(x)U^{-1}(a,\Lambda) = \hat{\varphi}(\Lambda x + a).$$
(2.1.46)

Die Lösung lautet

$$\hat{\varphi}(x) = S^{-1} \frac{\delta S}{i\delta J(x)} = \left(T e^{i\int\varphi J}\right)^{-1} \left(T\varphi(x) e^{i\int\varphi J}\right).$$
(2.1.47)

Die Rechnung von Abschnitt 1.4 zeigt

$$(\Box + m^2)\hat{\varphi}(x) = \left(Te^{i\int J\varphi}\right)^{-1}J(x)\left(Te^{i\int\varphi J}\right) = J(x)$$
(2.1.48)

Diese Bewegungsgleichung folgt aus der Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial \varphi \partial \varphi - m^2 \varphi^2) + J\varphi . \qquad (2.1.49)$$

Wir lösen sie explizit mit dem Ansatz

$$\hat{\varphi}(x) = \varphi(x) + \int \Delta_{?}(x-y)J(y)dy \qquad (2.1.50)$$

und wollen $\Delta_?$ so bestimmen, daß die Kausalität erfüllt ist. Kausalität heißt hier

$$\frac{\delta}{\delta J(y)}\hat{\varphi}(x) = 0 \qquad \text{für} \quad y \gtrsim x \qquad (2.1.51)$$

denn $\hat{\varphi}$ kann der Wechselwirkung, bestimmt durch J,nicht vorauseilen. Damit folgt

$$\Delta_{?} = \Delta_{ret}(x - y) = \theta(x_o - y_o)\Delta \qquad (2.1.52)$$

Dies ist die Lösung der Gleichung (1.1.65)

$$(\Box + m^2)\Delta_{ret} = \delta(x)$$

mit Integration über die Singularitäten wie in Bild 1.1.2 für G_{ret} angegeben.

Nehmen wir noch den Vakuumerwartungswert von (2.1.42), so haben wir $Z_o(J)$ (1.4.6) wiedergefunden und damit auch die dort angekündigte Interpretation. Z_o ist gerade der Erwartungswert der S-Matrix für die Streuung des Quantenfeldes $\hat{\varphi}(x)$ am äußeren Feld J und liefert, wie behauptet, die freien Greenschen Funktionen der Ableitung nach J an der Stelle J = 0 (in Übereinstimmung mit (2.1.42) und (1.4.7)). Dieses einfache Beispiel macht sehr deutlich, daß für die Beschreibung von Wechselwirkung Operatorprodukte vom Typ $\varphi^n(x)$ relevant sind. Da jedoch das Feld $\varphi(x)$ eine operatorwertige *Distribution* ist, sind solche Produkte nicht wohldefiniert. Z.B. führt bereits n = 2 zu einer quadratischen Divergenz :

$$\varphi^{2}(x) = \lim_{x \to y} \varphi(x)\varphi(y) = \lim_{x \to y} \left(\varphi^{(+)}(x)\varphi^{(+)}(y) + \varphi^{(+)}(x)\varphi^{(-)}(y) + \varphi^{(-)}(x)\varphi^{(-)}(y)\right)$$

$$= \varphi^{(+)}(x)\varphi^{(+)}(x) + 2\varphi^{(-)}(x)\varphi^{(+)}(x) + \lim_{x \to y} i\Delta_{+}(x-y) + \varphi^{(-)}(x)\varphi^{(-)}(x)$$

$$(2.1.53)$$

$$+ \lim_{x \to y} i\Delta_{+}(x-y) + \varphi^{(-)}(x)\varphi^{(-)}(x)$$

$$(2.1.54)$$

$$\lim_{x \to y} i\Delta_+(x-y) = \lim_{x \to y} \int \frac{d^*p}{(2\pi)^3} \frac{\theta(p_o)}{2\omega_p} e^{-ip(x-y)}$$

$$= \int_o^{\Lambda} dr \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{r^2}{2\sqrt{r^2 + m^2}} \xrightarrow{\Lambda \to \infty} \text{ const.} \Lambda^2$$
(2.1.55)

Die Ursache der Divergenz ist der singuläre Charakter der Kommutatorfunktion. Wie das Beispiel zeigt, sind demnach Produkte von Feldern am selben Ort wohldefiniert, wenn sie *normal* geordnet sind :

$$:\varphi^{2}:(x) = \varphi^{(+)}(x)\varphi^{(+)}(x) + 2\varphi^{(-)}(x)\varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x)\varphi^{(-)}(x)$$
(2.1.56)

alle Vernichter stehen rechts, alle Erzeuger stehen links (Wicksches Normalprodukt).

Kandidaten für die Operatoren $T_1(x_1)$ in der Entwicklung der S-Matrix (2.1.19) sind also Wick-Monome freier Felder: : φ^n : (x), : $\bar{\Psi}\varphi\Psi$: (x), : $\bar{\Psi}\gamma^{\mu}A_{\mu}\Psi$: (x) usw., allgemeiner auch Wick-Polynome. Sie bilden die Wechselwirkungs-Lagrangefunktion. Daß hiermit aber keineswegs alle Divergenzprobleme gelöst sind, vielmehr die für T_2 (2.1.27) bzw. T_n (2.1.41) erforderliche Zeitordnung d.h. Multiplikationen mit Stufenfunktionen $\theta(x^o - y^o)$ zu weiteren Singularitäten führt, zeigt ebenfalls bereits ein ganz einfaches Beispiel. Wir betrachten

$$T_1(x_1) = :\varphi^2: (x_1)$$
(2.1.57)

und definieren

$$T_2(x_1, x_2) = \begin{cases} : \varphi^2 : (x_1) : \varphi^2 : (x_2) & x_1 \gtrsim x_2 \\ : \varphi^2 : (x_2) : \varphi^2 : (x_1) & x_2 \gtrsim x_1 \end{cases}$$
(2.1.58)

auch für zuammenfallende Argumente ad hoc als

$$T_2(x_1, x_2) = \theta(x_1^o - x_2^o) : \varphi^2 : (x_1) : \varphi^2 : (x_2) + \theta(x_2^o - x_1^o) : \varphi^2 : (x_2) : \varphi^2 : (x_1)$$
(2.1.59)

Dann tritt in der Umformung von (2.1.59) in Normalordnung – die die "am besten" existierende ist – der Beitrag $\Delta_c(x_1 - x_2)\Delta_c(x_1 - x_2)$ auf. Dieses Produkt im Ortsraum entspricht einer Faltung im Impulsraum

$$\Delta_c^2(x_1 - x_2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dp e^{-ip(x_1 - x_2)} \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk I(k, p)$$
(2.1.60)

$$I(k,p) = \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)((p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon)}$$
(2.1.61)

Und hier ist das Integral $\int dk I(k, p)$ logarithmisch divergent. Wir können – ebenfalls ad hoc – eine Umdefinition vornehmen :

$$\Delta_c^2(x_1 - x_2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dp e^{-ip(x_1 - x_2)} \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk \Big(I(k, p) - I(k, 0) \Big)$$
(2.1.62)

und uns davon überzeugen, daß das Produkt Δ_c^2 nunmehr existiert und der Subtraktionsterm einer erlaubten Redefinition des *T*-Produktes entspricht. Damit ist das weitere Programm vorgegeben :

Wicksche Normalprodukte sind umzuordnen, zeitgeordnete Produkte sind wohldefiniert zu machen und es ist zu zeigen, daß diese Redefinition im Einklang mit den Axiomen ist.

Wir wollen anmerken, daß dies die *übliche* nicht aber die logisch klarste Vorgehensweise ist: zuerst einen nicht definierten Ausdruck – die zeitgeordneten Produkte $T(\mathcal{L}_{int} \dots \mathcal{L}_{int})$ – hinzuschreiben, ihn dann durch eine "Renormierung" wohl-definiert zu machen, und anschließend zu zeigen, daß die gewünschten Axiome erfüllt sind, ist gewiß eine undurchsichtige Prozedur. Die andere Vorgehensweise, die wir oben skizziert haben und im Abschnitt 3.3 fortsetzen werden, benutzt die Axiome unmittelbar zur Konstruktion der *S*-Matrix, ist also logisch viel befriedigender. Der Grund, den traditionellen Weg zu beschreiben, ist ein rein technischer: er benutzt mathematische Hilfsmittel, die zunächst wesentlich anspruchsloser sind. Man muß nicht sofort mit der ganzen Fülle operatorwertiger Distributionen arbeiten, sondern kann über weite Strecken *Funktionen* studieren.

2.2 Hilfsmittel der Berechnung

2.2.1 Das Wicksche Theorem

Wie der vorangehende Abschnitt zeigt, besteht des öfteren die Notwendigkeit, gewöhnliche oder auch zeitgeordnete Produkte freier Felder zu normal geordneten in Beziehung zu setzen. Der Hintergrund dafür ist die Entwicklung der S-Matrix in eine Summe von zeitgeordneten Operatorprodukten und die Entwicklung ihrer Matrixelemente als Erwartungswerte davon.

Wir gehen also von einem (formalen) Operatorprodukt $O_1 \ldots O_n$, bei dem die Operatoren O_i beliebige freie Felder sind, aus und stellen uns die Aufgabe, es durch eine Linearkombination von normal geordneten Operatoren zu ersetzen. Hierzu definieren wir zunächst einmal das normal geordnete Produkt von n Operatoren (Wicksches Normalprodukt).

Def.:
$$: O_1 \dots O_n := \pm \underbrace{O_{\alpha_1} \dots O_{\alpha_l}}_{\text{Erzeugungs-} \text{Vernichtungsoperatoren}} \underbrace{O_{\alpha_{l+1}} \dots O_{\alpha_n}}_{\text{Vernichtungsoperatoren}}$$

$$\pm \text{für} \begin{cases} gerade \\ ungerade \end{cases} \text{Permutation der Spinorfelder} \end{cases}$$
(2.2.1)

d.h. alle Erzeugungsoperatoren stehen links von den Vernichtungsoperatoren. Damit gilt also

$$\langle o|: O_1 \dots O_n: |o\rangle = 0 \tag{2.2.2}$$

Wenn die Operatoren O_i vollständige Felder sind, werden sie zerlegt in die Summe von Erzeugern und Vernichtern, wenn sie Ableitungen enthalten, werden diese vor das Produkt :: gezogen.

Wir wollen nun das Wicksche Theorem für Normalprodukte formulieren und beweisen.

$$O_{1} \dots O_{n} =: O_{1} \dots O_{n}: + \sum_{i < j} (\pm) \langle O_{i}O_{j} \rangle: O_{1} \dots \check{O}_{i} \dots \check{O}_{j} \dots O_{n}:$$

+
$$\sum_{\substack{i < j \\ k < l}} (\pm) \langle O_{i}O_{j} \rangle \langle O_{k}O_{l} \rangle: O_{1} \dots \check{O}_{i} \dots \check{O}_{j} \dots \check{O}_{k} \dots \check{O}_{l} \dots O_{n}:$$

+
$$\dots \sum_{\substack{i_{1} < j_{1} \\ i_{\alpha} < j_{\alpha}}} \pm \prod_{\alpha} \langle O_{i_{\alpha}}O_{j_{\alpha}} \rangle: O_{1} \dots \check{O}_{i_{1}} \dots \check{O}_{j_{\alpha}} \dots O_{n}:$$
 (2.2.3)

(O heißt, dieses Feld ist wegzulassen). Die Summation erstreckt sich über alle nicht-leere Mengen K von Paaren O_iO_j (die einander elementfremd sind), die sich aus $O_1 \ldots O_n$ herausgreifen lassen; das Produkt \prod_{α} über alle Paare, die zur Menge K gehören.

Zum Beweis betrachten wir den Fall n = 2 explizit, geben dann eine Rekursionsformel an und benutzen anschließend vollständige Induktion.

$$\underline{n=2}$$

$$O_1 O_2 = (O_1^{(+)} + O_1^{(-)})(O_2^{(+)} + O_2^{(-)})$$

= $O_1^{(+)}O_2^{(+)} + O_1^{(+)}O_2^{(-)} + O_1^{(-)}O_2^{(+)} + O_1^{(-)}O_2^{(-)}$ (2.2.4)

$$: O_1 O_2: = O_1^{(+)} O_2^{(+)} + O_1^{(-)} O_2^{(+)} + O_2^{(-)} O_1^{(+)} + O_1^{(-)} O_2^{(-)}$$
(2.2.5)

$$O_1 O_2 =: O_1 O_2: + \langle O_1 O_2 \rangle,$$
 (2.2.6)

wobei

$$\langle O_1 O_2 \rangle = \langle \left[O_1^{(+)}, O_2^{(-)} \right] \rangle = i\Delta^+$$
(2.2.7)

$$O_1 O_2 = O_2 O_1 + \langle O_1 O_2 \rangle.$$
(2.2.8)

Die angekündigte Rekursionsformel lautet

$$: O_1 \dots O_n : O =: O_1 \dots O_n O : + \sum_{j=1}^n \pm \langle O_j O \rangle : O_1 \dots \check{O}_j \dots O_n : \qquad (2.2.9)$$

 $(\pm$: Permutation der Spinorfelder)

Denken wir uns die vollständigen Felder in Erzeuger und Vernichter zerlegt, dann reicht es aus, (2.2.9) für den Fall zu beweisen, daß die O_i und O Erzeuger oder Vernichter sind.

Wir stellen zuerst fest, daß

$$O_1^{(+)} \dots O_m^{(+)} O^{(-)} =: O_1^{(+)} \dots O_m^{(+)} O^{(-)}: + \sum_{j=1}^m \pm \langle O_j^{(+)} O^{(-)} \rangle O_1^{(+)} \dots \check{O}_j^{(+)} \dots O_m^{(+)}$$
(2.2.10)

gilt; denn, wenn $O^{(-)}$ nach links durch die Vernichter hindurchkommutiert wird, erzeugt man gerade für jedes Feld den Faktor $\langle O_j^{(+)}O^{(-)}\rangle$. Nun multiplizieren wir (2.2.10) von links mit Erzeugern $O_{m+1}^{(-)} \dots O_n^{(-)}$ und erhalten

$$: O_1^{(+)} \dots O_m^{(+)} \dots O_n^{(-)} : O^{(-)} = : O_1^{(+)} \dots O_n^{(-)} O^{(-)} :$$
$$+ \sum_{j=1}^m \pm \langle O_j^{(+)} O^{(-)} \rangle : O_1^{(+)} \dots \check{O}_j^{(+)} \dots O_n^{(-)} : ,$$
(2.2.11)

so war ja das Normalprodukt definiert. Da $\langle O_j^{(-)}O^{(-)}\rangle = 0$, ist aber (2.2.11) mit (2.2.9) identisch.

Für einen Vernichtungsoperator $O^{(+)}$ gilt

$$: O_1 \dots O_n : O^{(+)} =: O_1 \dots O_n O^+ :$$
 (2.2.12)

trivialerweise, denn $\langle O_j O^{(+)} \rangle = 0$. Also ist (2.2.12) ebenfalls mit (2.2.9) identisch und damit die Rekursionsformel bewiesen.

Nun führen wir den Beweis des Theorems über vollständige Induktion. Wir nehmen (2.2.3) für fixiertes n als gültig an und wollen zeigen, daß die entsprechende Formel dann auch für n+1 gilt. Zu diesem Zweck multiplizieren wir (2.2.3) mit O und benutzen sukzessive die Rekursionsformel (2.2.9). Anwendung der Rekursionsformel auf : $O_1 \ldots O_n$: O liefert : $O_1 \ldots O_n O$: , d.h. den "reinen" Normalprodukterm für n+1 und die Einfachkontraktionen $\Sigma \pm \langle O_j O \rangle$: $O_1 \ldots \check{O}_j \ldots O_n$: . Der Term $\sum_{i < j} \pm \langle O_i O_j \rangle$: $O_1 \ldots \check{O}_i \ldots \check{O}_j \ldots O_n$: liefert die zu n+1 fehlenden Einfachkontraktionen und einen Teil der Zweifachkontraktionen, nämlich $\sum_{i < j} \pm \langle O_i O_j \rangle \langle O_k O_l \rangle$: $O_1 \ldots \check{O}_i \ldots \check{O}_j \ldots \check{O}_k \ldots \check{O}_l O$: kommen wieder vom ersten Beitrag der Rekursionsformel angewandt auf $\sum_{\substack{i < j \\ k < l}} \pm \langle O_i O_j \rangle \langle O_k O_l \rangle$: $O_1 \ldots \check{O}_l \ldots O_n$: O usw. Es ist klar, daß man auf diese Weise (2.2.3) für n+1 erhält. Damit ist das Theorem bewiesen.

Das Wicksche Theorem gilt auch, wenn Operatoren O_i ersetzt sind durch bereits normalgeordnete Produkte $M_i(x_i) =: O_{i_1}(x_i) \dots O_{i_l}(x_l)$: Dann sind keine Kontraktionen auszuführen zwischen Feldern ein und desselben Produktes $M_i(x_i)$, denn diese sind bereits normalgeordnet, so daß alle derartigen Kontraktionen verschwinden.

Als nächstes wollen wir das Wicksche Theorem für zeitgeordnete Produkte aufführen

$$T(O_{1}(x_{1})\dots O_{n}(x_{n})) =: O_{1}(x_{1})\dots O_{n}(x_{n}):$$

+ $\sum_{K} \pm \prod_{jj'} \langle TO_{j}(x_{j})O_{j'}(x_{j'}) \rangle: O_{1}(x_{1})\dots \check{O}_{j}(x_{j})\dots \check{O}_{j'}(x_{j'})\dots O_{n}(x_{n}):$
(2.2.13)

Die Summe erstreckt sich über alle nicht-leere Mengen K von Paaren $O_j O_{j'}$ (die zueinander elementfremd sind), die sich aus den Operatoren $O_1 \ldots O_n$ herausgreifen lassen; das Produkt $\prod_{jj'}$ über alle Paare $O_j O_{j'}$, die zu K gehören. Der Beweis folgt sofort aus dem Wickschen Theorem für gewöhnliche Produkte, indem man eine bestimmte Zeitreihenfolge wählt und auf das sich ergebende Produkt das Theorem (2.2.3) anwendet.

Zur Berechnung von S-Matrixelementen werden Erweiterungen benötigt: daß erstens die Operatoren $O_i(x_i)$ durch Monome $M_i(x_i)$ (s.o.) ersetzt werden und zweitens, daß sie mit ungeordneten Erzeugern bzw. Vernichtern multipliziert sind. Die entsprechende Formel lautet

$$A_{1}^{(+)} \dots A_{a}^{(+)} T(M_{1}(x_{1}) \dots M_{n}(x_{n})) B_{1}^{(-)} \dots B_{b}^{(-)} = : A_{1}^{(+)} \dots A_{a}^{(+)} T(M_{1}(x_{1}) \dots M_{n}(x_{n})) B_{1}^{(-)} \dots B_{b}^{(-)} : + \sum_{K} C_{K} N_{K}$$

$$(2.2.14)$$

Hier ist Σ_K wieder die Summe über alle Kontraktionen wie oben, bei denen jedoch Kontraktionen der A's untereinander, eines Monoms $M_i(x_i)$ mit sich und der B's untereinander wegzulassen sind.

$$C_{K} = \pm \prod_{j_{\alpha}j'_{\alpha}} \langle TO_{j_{\alpha}}(x_{j})O_{j'_{\alpha}}(x_{j'}) \rangle \prod_{jj'} \langle A_{j}^{(+)}B_{j'}^{(-)} \rangle \times \\ \times \prod_{jj'_{\alpha}} \langle A_{j}^{+}O_{j'_{\alpha}}(x_{j'}) \rangle \prod_{j_{\alpha}j'} \langle O_{j_{\alpha}}(x_{j})B_{j'}^{(-)} \rangle$$

$$(2.2.15)$$

und im entsprechenden Faktor N_K sind gerade diese Felder wegzulassen.

Hier ist eine Bemerkung angebracht. In den zeitgeordneten Kontraktionen $\langle TO_{j_{\alpha}}(x_j)O_{j'_{\alpha}}(x_{j'})\rangle$ können Produkte der Form $\Delta_c(x_1 - x_2)\Delta_c(x_1 - x_2)$ auftreten, die mathematisch zunächst nicht definiert sind (vgl. Abschnitt 2.1.2 und Abschnitt 3). Gl. 2.2.14 stellt *keine* Definition dieser Ausdrücke dar, sondern regelt lediglich die Kombinatorik. Man sollte also alle auftretenden Größen als Elemente einer formalen Algebra auffassen, für die Relationen formalen Inhaltes gezeigt werden.

2.2.2 Das erzeugende Funktional für Greensche Funktionen wechselwirkender Felder

In Abschnitt 1.4 haben wir das erzeugende Funktional für Greensche Funktionen definiert (vgl.(1.4.4))

$$Z(J) = \langle Te^{i \int dx \varphi(x) J(x)} \rangle.$$
(2.2.16)

Wir wollen nun eine Feldgleichung für Z(J) angeben, sie lösen und an dem so gewonnenen Ausdruck die Probleme illustrieren, die in der störungstheoretischen Formulierung für Greensche Funktionen wechselwirkender Felder zu lösen sind. Wir nehmen also an, daß φ ein wechselwirkendes Feld ist, das für große Zeiten in freie Felder φ_{ein} bzw. φ_{aus} übergeht:

$$\begin{array}{ll} x_o \to +\infty & \varphi(x) \to \sqrt{z}\varphi_{\underline{aus}} \\ x_o \to -\infty & \varphi(x) \to \sqrt{z}\varphi_{\underline{ein}} \end{array}$$
(2.2.17)

und, daß das Vakuum in (2.2.16) im Sinne der Störungstheorie das freie Vakuum ist. Dann hat

$$\frac{\delta}{i\delta J(x)}Z(J) = \langle T(\varphi(x)e^{i\int J\varphi}\rangle$$
(2.2.18)

als Randbedingungen, daß es für $x_o \to +\infty$ nur positive Frequenzen, für $x_o \to -\infty$ nur negative Frequenzen enthält. Wir nehmen des weiteren an, daß φ eine Bewegungsgleichung erfüllt

$$(\Box + m^2)\varphi = -V'(\varphi): = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}, \qquad (2.2.19)$$

wie sie aus einer Wirkung

$$\Gamma = \int dx \left(-\frac{1}{2}\varphi(\Box + m^2)\varphi - V(\varphi)\right)$$
(2.2.20)

folgt. (V sei ein Polynom in φ .) Unser Ziel ist es, (2.2.19) in eine Gleichung für Z(J) überzuführen. Für das freie Feld war das in Abschnitt 1.4 mit Hilfe der kanonischen Vertauschungsrelationen

$$\left[\varphi(x), \varphi(y) \right]_{|_{x_o = y_o}} = 0,$$

$$\left[\dot{\varphi}(x), \varphi(y) \right]_{|_{x_o = y_o}} = -i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

$$(2.2.21)$$

gelungen.

Nehmen wir sie hier probeweise auch für das wechselwirkende Feld als gültig an, so folgt (analog zu (1.4.17))

$$(\Box + m^2)\frac{\delta Z}{i\delta J} = J(x)Z(J) - \langle T(V'(\varphi)e^{i\int J\varphi})\rangle$$

= $J(x)Z(J) - V'(\frac{\delta}{i\delta J})Z(J)$ (2.2.22)
= $(J(x) - V'(\frac{\delta}{i\delta J(x)}))Z(J)$

 $\frac{\delta Z}{i\delta J}$ enthält für $x_o \to \pm \infty$ nur $\begin{cases} \text{positive} \\ \text{negative} \end{cases}$ Frequenzen, also gilt

$$\frac{\delta Z}{i\delta J(x)} = i \int dy \Delta_c(x-y) \left\{ J(y) - V'(\frac{\delta}{i\delta J(y)}) \right\} Z(J)$$
(2.2.23)

Um diese Gleichung zu lösen, benutzen wir

$$\begin{bmatrix} J(x), \frac{\delta}{i\delta J(y)} \end{bmatrix} = i\delta(x-y)$$
$$\begin{bmatrix} J(x), (\frac{\delta}{i\delta J(y)})^n \end{bmatrix} = i\delta(x-y)n(\frac{\delta}{i\delta J(y)})^{n-1}$$
(2.2.24)
$$\begin{bmatrix} J(x), \int dy V(\frac{\delta}{i\delta J(y)}) \end{bmatrix} = iV'(\frac{\delta}{i\delta J(x)})$$

d.h.

$$\frac{\delta Z(J)}{i\delta J(x)} = i \int dy \Delta_c(x-y) \Big\{ J(y) - i[J(y), \int dz \mathcal{L}_{\text{int}}(\frac{\delta}{i\delta J(z)})] \Big\} Z(J) \quad (2.2.25)$$

 $(\mathcal{L}_{int} \equiv -V(\varphi))$ Mit Hilfe von

$$e^{A}Be^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A[A, B]] + \dots$$
 (2.2.26)

ergibt sich

$$e^{i\int dz \mathcal{L}_{int}(\frac{\delta}{i\delta J(z)})} J(y) \ e^{-i\int du \mathcal{L}_{int}(\frac{\delta}{i\delta J(u)})} = J(y) + i \left[\int dz \mathcal{L}_{int}(\frac{\delta}{i\delta J(z)}), J(y) \right]$$
(2.2.27)

also eingesetzt in (2.2.25)

$$\frac{\delta Z(J)}{i\delta J(x)} = i \int dy \Delta_c(x-y) \left\{ e^{i \int \mathcal{L}_{\text{int}}} J(y) e^{-i \int \mathcal{L}_{\text{int}}} \right\} Z(J)$$
(2.2.28)

oder

$$(\Box + m^2) \frac{\delta}{i\delta J(x)} \left(e^{-i\int \mathcal{L}_{int}} Z(J) \right) = J(x) \left(e^{-i\int \mathcal{L}_{int}} Z(J) \right)$$
(2.2.29)

Mit den früheren Frequenzbedingungen folgt wie aus (1.4.25)

$$e^{-i\int \mathcal{L}_{int}}Z(J) = \text{const. } Z_o(J)$$
 (2.2.30)

oder

$$Z(J) = \frac{e^{i \int \mathcal{L}_{int}(\frac{\delta}{i\delta J})} e^{-\frac{1}{2} \int dx dy J(x)\Delta_c(x-y)J(y)}}{\left[e^{i \int \mathcal{L}_{int}} e^{-\frac{1}{2} \int dx dy J(x)\Delta_c(x-y)J(y)}\right]}\Big|_{J=0}$$
(2.2.31)

Der Nenner gewährleistet die Normierungsbedingung

$$Z(0) = 1. (2.2.32)$$

Um (2.2.31) und seine Herleitung in's richtige Licht zu rücken, nehmen wir ein Teilergebnis der weiteren Analyse vorweg. Es wird sich zeigen, daß in einer systematischen Störungsentwicklung für Z(J) (und damit z.B. auch für (2.2.22)) nur ganz bestimmte Teilbeiträge wohl-definiert sind, während andere divergent sind und für die Gesamtsumme Z(J) gar keine Existenzaussage getroffen werden kann. Die Ursache hierfür ist einmal mehr, daß Produkte von Feldern (hier $V'(\varphi)$) nicht a priori definiert sind, sondern einer konstruktiven Definition bedürfen. Hand in Hand geht damit, daß wechselwirkende Felder sicher nicht die kanonischen Vertauschungsrelationen (2.2.21) erfüllen: jede nicht-naive Definition von $V'(\varphi)$ wird sich auch auf sie auswirken. Damit ist die Bedeutung von (2.2.31) auf die Wahrung der richtigen Kombinatorik reduziert und darauf, deutlich zu machen, welche Größen sinnvollerweise wohl-definiert werden sollten. Insbesondere gibt diese Formel an, wie man von einer (formalen) Operatorgleichung, nämlich (2.2.19), zu einer (ebenfalls formalen) Gleichung für Greensche Funktionen gelangt. Die exakte Definition von Z(J) wird umgekehrt eine exakte Operatorgleichung zur Folge haben.

Man kann (2.2.31) im Stellenwert mit der Gell-Mann-Low-Formel

$$\langle T\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)\rangle_{\rm int} = \frac{\langle T\varphi^{(o)}(x_1)\dots\varphi^{(o)}(x_n)e^{i\int \mathcal{L}_{\rm int}^{(o)}}\rangle_{(o)}}{\langle Te^{i\int \mathcal{L}_{\rm int}^{(o)}}\rangle_{(o)}}$$
(2.2.33)

vergleichen, bevor die Beiträge auf der rechten Seite wohl-definiert worden sind. Bei ihrer Herleitung verwendet man üblicherweise das Wechselwirkungsbild, das ebenfalls nicht naiv existiert, um die Greenschen Funktionen der wechselwirkenden Theorie mit denen der freien Theorie störungstheoretisch zu verknüpfen. (2.2.33) und (2.2.31) wahren die Kombinatorik und die Erfüllung der Axiome (Abschnitt 2.1) in einem formalen Sinne und sind deswegen von großem heuristischem Wert, sie können aber in dieser naiven Form nicht streng gültig sein. Es ist vielmehr Ziel, insbesondere des nachfolgenden Abschnitts 3, klar zu machen, wie Z(J) streng konstruiert werden kann. Es wird sich zeigen, daß eine Formulierung für Z(J) existiert, die zu (2.2.31) ganz analog ist (s. Abschnitt 4, (4.1.23)).

2.2.3 Feynman-Diagramme

Wir wollen nun am Beispiel

$$\mathcal{L}_{\rm int} = -\frac{\lambda}{4!}\varphi^4 \tag{2.2.34}$$

die Formel (2.2.31) auswerten, indem wir sie als eine formale Potenzreihe in λ auffassen und für einige Ordnungen in λ untersuchen, was für die Greenschen Funktionen in den jeweiligen Ordnungen resultiert.

Ordnung λ^{o} :

$$Z(J) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\int J\Delta_c J}}{1} = Z_o(J), \qquad (2.2.35)$$

das erzeugende Funktional für die *freien* Greenschen Funktionen.

Ordnung λ^1 :

$$(Z(J))^{(1)} = -i\frac{\lambda}{4!} \int dz \left(\frac{\delta}{i\delta J(z)}\right)^4 e^{\frac{1}{2}\int iJ\Delta_c iJ}$$
(2.2.36)

2.2. HILFSMITTEL DER BERECHNUNG

Wir benötigen also Mehrfachableitungen von $Z_o(J)$.

$$\frac{\delta}{i\delta J(z)}Z_o = \int dx \Delta_c(z-x)iJ(x)e^{\frac{1}{2}\int iJ\Delta_c iJ}$$
(2.2.37)

$$\left(\frac{\delta}{i\delta J(z)}\right)^2 Z_o = \left(\Delta_c(o) + \left(\int dx \Delta_c(z-x)iJ(x)\right)^2\right) e^{\frac{1}{2}\int iJ\Delta_c iJ}$$
(2.2.38)

$$\left(\frac{\delta}{i\delta J(z)}\right)^3 Z_o = \left(3\Delta_c(o)\left(\int dx \Delta_c(z-x)iJ(x)\right) + \left(\int dx \Delta_c(z-x)iJ(x)\right)^3\right) e^{\frac{1}{2}\int iJ \Delta_c iJ}$$
(2.2.39)

$$\left(\frac{\delta}{i\delta J(z)}\right)^4 Z_o = \left(3(\Delta_c(o))^2 + 6\Delta_c(o)\left(\int dx \Delta_c(z-x)iJ(x)\right)^2 + \left(\int dx \Delta_c(z-x)iJ(x)\right)^4\right)e^{\frac{1}{2}\int iJ \Delta_c iJ}$$
(2.2.40)

Wenn wir einen Propagator $\Delta_c(z - x)$ durch eine Linie und die Quellen J(x) durch ein Kreuz bei x darstellen, so läßt sich die Klammer, die $Z_o(J)$ in (2.2.40) multipliziert, graphisch folgendermaßen wiedergeben

Die numerischen Koeffizienten 3,6,1 ergeben sich ebenfalls graphisch: sie geben die Anzahl der möglichen Arten an, wie man vom Vertex + durch Schließen von Linien zum jeweiligen Diagramm gelangen kann. Das sind bei \bigcirc 3, bei

_____ aber $3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten und bei \times gerade 1.

Nullte und erste Ordnung in λ lauten also für Z(J)

$$(Z(J))^{(\leq 1)} = \frac{1 - i\frac{\lambda}{4!} \int dz (3 \bigcirc +6 \swarrow + \frac{1}{4!} \int dz (3 \bigcirc +6 \swarrow + \frac{1}{4!} \int dz (3 \bigcirc +6 \rightthreetimes +\frac{1}{4!} \int dz (3 \bigcirc +6 \rightthreetimes +1) (3 \lor +1) (3$$

Das "Vakuumdiagramm" (X) des Zählers wird durch den entsprechenden Beitrag im Nenner kompensiert.

Die Greenschen Funktionen ergeben sich durch Differentiation nach J an der Stelle J = 0. Diese Ableitungen müssen also mindestens auf alle J-Faktoren der

Diagramme \downarrow und \downarrow wirken, damit in der Ordnung λ^1 ein nicht-

verschwindender Beitrag entsteht. Die entstehenden analytischen Ausdrücke sind dieselben ohne die Faktoren iJ, daher zeichnen wir für sie auch dieselben Diagramme ohne die Kreuze. Wir nennen die entsprechenden Propagatoren $\ddot{a}u\beta ere$ Linien des Diagramms. Die anderen Linien heißen innere. In der Ordnung λ^1 sind demnach zwei Beiträge "zusammenhängend":

$$\frac{\delta^2}{i\delta J(x_1)i\delta J(x_2)} Z(J)^{(1)}\Big|_{J=0} = \langle T(\varphi(x_1)\varphi(x_2))\rangle_c^{(1)}$$
$$= -i\frac{\lambda}{4!} \cdot 6 \cdot 2 \cdot \Delta_c(o) \int dz \Delta_c(z-x_1)\Delta_c(z-x_2)$$
(2.2.42)

und

$$\prod_{k=1}^{4} \frac{\delta}{i\delta J(x_k)} Z(J)^{(1)} \Big|_{J=0} = \langle T(\varphi(x_1)\varphi(x_1)\varphi(x_3)\varphi(x_4)) \rangle_c^{(1)}$$

$$= -i\lambda \int dz \Delta_c (z-x_1) \Delta_c (z-x_2) \Delta_c (z-x_3) \Delta_c (z-x_4)$$
(2.2.43)

 $(\langle \ldots \rangle_c: \text{ connected} = \text{zusammenhängend})$

alle anderen Beiträge (d.h. *J*-Ableitungen wirken auch auf $Z_o(J)$) sind "unzusammenhängend": man kann nicht von jedem äußeren Punkt des Diagramms zu jedem anderen gelangen, ohne das Diagramm zu verlassen.

Ordnung λ^2 :

$$\frac{1}{2!} \left(-\frac{i\lambda}{4!}\right)^2 \int dz_1 \left(\frac{\delta}{i\delta J(z_1)}\right)^4 \int dz_2 \left(\frac{\delta}{i\delta J(z_2)}\right)^4 e^{\frac{1}{2}\int iJ\Delta_c iJ} \text{ führt zu :}$$

$$\left(\frac{\delta}{i\delta J(z_{1})}\right)^{4} \left\{3 \bigcirc +6 \swarrow + \frac{1}{2} \int iJ\Delta_{c}iJ \right\} e^{\frac{1}{2}\int iJ\Delta_{c}iJ}$$

$$= \left(\frac{\delta}{i\delta J(z_{1})}\right)^{4} \left\{\cdots\right\} \cdot e^{\frac{1}{2}\int iJ\Delta_{c}iJ}$$

$$+ 4\left(\frac{\delta}{i\delta J(z_{1})}\right)^{3} \left\{\cdots\right\} \left(\frac{\delta}{i\delta J(z_{1})}\right) e^{\frac{1}{2}\int iJ\Delta_{c}iJ}$$

$$+ 6\left(\frac{\delta}{i\delta J(z_{1})}\right)^{2} \left\{\cdots\right\} \left(\frac{\delta}{i\delta J(z_{1})}\right)^{2} e^{\frac{1}{2}\int iJ\Delta_{c}iJ}$$

$$+ 4\left(\frac{\delta}{i\delta J(z_{1})}\right) \left\{\cdots\right\} \left(\frac{\delta}{i\delta J(z_{1})}\right)^{3} e^{\frac{1}{2}\int iJ\Delta_{c}iJ}$$

$$+ \left\{\cdots\right\} \left(\frac{\delta}{i\delta J(z_{1})}\right)^{4} e^{\frac{1}{2}\int iJ\Delta_{c}iJ}$$

$$+ 12 \Delta_{c}(o)\Delta_{c}(z_{1} - z_{2})\left(\int \Delta_{c}(z_{1} - x)iJ(x)\right)^{3} \int \Delta_{c}(z_{2} - y)iJ(y)$$

$$12 \xrightarrow{*} Z_{2} \xrightarrow{*} Q_{2}$$

$$+ 12 \Delta_{c}(o)\Delta_{c}(z_{1} - z_{2}) \int \Delta_{c}(z_{1} - x)iJ(x)\left(\int \Delta_{c}(z_{2} - y)iJ(y)\right)^{3}$$

$$12 \bigcirc Z_{2} \xrightarrow{*} Q_{2}$$

$$+ 4 \Delta_{c}(z_{1} - z_{2})\left(\int \Delta_{c}(z_{1} - x)iJ(x)\right)^{3}\left(\int \Delta_{c}(z_{2} - y)iJ(y)\right)^{3}\right) \qquad (2.2.45)$$

$$4 \xrightarrow{*} Z_{2} \xrightarrow{*} Q_{2}$$

$$+ \left(3 \bigcirc + 6 \xrightarrow{*} + \xrightarrow{*} \right) \times$$

$$\times \left(3 \bigcirc + 6 \xrightarrow{*} + \xrightarrow{*} + \xrightarrow{*} \right) \right\} e^{\frac{1}{2}\int iJ\Delta_{c}iJ}$$

Die Vakuumbeiträge (Diagramme ohne äußere Linien) kompensieren sich auch für die zweite Ordnung in λ , denn wenn alle Ableitungen, die von \mathcal{L}_{int} herrühren, ausgeführt sind und dann J = 0 gesetzt wird, so ist Zähler = Nenner. Also ergibt sich

Diese beiden Ordnungen in λ sollten klar gemacht haben, wie Greensche Funktionen aus (2.2.31) zu gewinnen sind. Das Ergebnis läßt sich formalisieren in den "Feynmanregeln", die es gestatten, unmittelbar Diagramme und ihr analytisches Äquivalent anzugeben. Das heißt also für die Wechselwirkung (2.2.34) folgendermaßen: Um die Beiträge für eine (zusammenhängende) Greensche Funktion der Ordnung λ^n zu erhalten, zeichne man *n* Vertizes, verbinde die Vertizes auf alle möglichen Arten, so daß ein Diagramm mit der gewünschten Anzahl an äußeren Linien entsteht, integriere über die *n* Argumente, multipliziere mit den kombinatorischen Faktoren sowie mit $(-\frac{i\lambda}{4!})^n$ und addiere alle Diagramme. Da für alle gebräuchlichen Wechselwirkungen Feynmanregeln hergeleitet und gut

Da fur alle gebrauchlichen Wechselwirkungen Feynmanregeln hergeleitet und gut dokumentiert sind, verzichten wir hier auf eine detailliertere Darstellung. Wichtig war uns das Prinzip, wie die Feynmanregeln aus (2.2.31) folgen.

Relevant für das Renormierungsprogramm ist nun noch die Unterscheidung von Diagrammen, die geschlossene Schleifen enthalten und solche, die das nicht tun. Letztere heißen "Baumdiagramme" (engl. tree diagrams). Ein Beispiel ist das Diagramm

$$\sim \lambda^2 \int dz_1 dz_2 \ \Delta_c(z_1 - z_2) (\int dx_1 \ \Delta_c(z_1 - x_1) i J(x_1))^3 (\int dx_2 \ \Delta_c(z_2 - x_2) i J(x_2))^3$$
(2.2.47)

aus (2.2.46). Es liefert einen Beitrag zu $\langle T(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_6)) \rangle^{(2)}$, nämlich etwa

$$\sim \lambda^{2} \int dz_{1} dz_{2} \ \Delta_{c}(z_{1} - z_{2}) \prod_{j=1}^{3} \Delta_{c}(x_{j} - z_{1}) \prod_{j=4}^{6} \Delta_{c}(z_{2} - x_{j})$$

$$= \lambda^{2} \int dz_{1} dz_{2} \int \frac{dk}{(2\pi)^{4}} e^{-i(z_{1} - z_{2})k} \int \prod_{j=1}^{3} \frac{dp_{j}}{(2\pi)^{4}} e^{-i(x_{j} - z_{1})p_{j}} \int \prod_{j=4}^{6} \frac{dp_{j}}{(2\pi)^{4}} e^{-i(z_{2} - x_{j})p_{j}} \times$$

$$\times \tilde{\Delta}_{c}(k) \prod_{j=1}^{6} \tilde{\Delta}_{c}(p_{j})$$

$$= \lambda^{2} \int dz_{1} dz_{2} \frac{dk}{(2\pi)^{4}} \prod_{j=1}^{3} \frac{dp_{j}}{(2\pi)^{4}} e^{-ix_{j}p_{j}} \prod_{j=4}^{6} \frac{dp_{j}}{(2\pi)^{4}} e^{ix_{j}p_{j}} e^{-iz_{1}(k - (p_{1} + p_{2} + p_{3}))} \times$$

$$\times e^{-iz_{2}(-k + (p_{4} + p_{5} + p_{6}))} \tilde{\Delta}_{c}(k) \prod_{j=1}^{6} \tilde{\Delta}_{c}(p_{j})$$

$$= (2\pi)^{4} \lambda^{2} \int \prod_{j=1}^{3} \frac{dp_{j}}{(2\pi)^{4}} e^{-ix_{j}p_{j}} \prod_{j=4}^{6} \frac{dp_{j}}{(2\pi)^{4}} e^{ix_{j}p_{j}} \delta(p_{1} + \ldots + p_{6}) \tilde{\Delta}_{c}(p_{1} + p_{2} + p_{3}) \times \\ \times \prod_{j=1}^{6} \tilde{\Delta}_{c}(p_{j})$$

$$(2.2.48)$$

d.h. die verbleibenden Integrationen entsprechen nur noch den Fouriertransformationen, es sind keine Integrationen über innere Impulse auszuführen: es treten keine Divergenzen auf.

Und das gilt allgemein für (zusammenhängende) Baumdiagramme: die Anzahl I der inneren Linien und die Anzahl der Vertizes V ist verknüpft durch

$$I = V - 1. (2.2.49)$$

D.h. die V Ortsintegrationen liefern $V \delta$ -Funktionen im Impulsraum; mit ihnen kann man die I Integrationen über die inneren Impulse ausführen und behält dann noch eine δ -Funktion, die die Erhaltung des Gesamtimpulses für das Diagramm ausdrückt.

Entsprechend sagt die Euler-Formel für ein zusammenhängendes Diagramm mit m Schleifen, I inneren Linien und V Vertizes:

$$m = I - V + 1 \tag{2.2.50}$$

aus, daß nach Ausführen der Integration über die Raum-Zeit-Koordinaten der Vertizes eine δ -Funktion für den Gesamtimpuls und m Integrationen über innere Impulse verbleiben.

Betrachten wir als Beispiel

$$\sim \lambda^2 \int dz_1 dz_2 (\Delta_c(z_1 - z_2))^2 (\int dx_1 \Delta_c(z_1 - x_1) i J(x_1))^2 (\int dx_2 \Delta_c(z_2 - x_2) i J(x_2))^2$$

so trägt das Diagramm zu $\langle T(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_4)) \rangle^{(2)}$ bei und zwar etwa den Term

$$\lambda^{2} \int dz_{1} dz_{2} (\Delta_{c}(z_{1}-z_{2}))^{2} \Delta_{c}(z_{1}-x_{1}) \Delta_{c}(z_{1}-x_{2}) \Delta_{c}(z_{2}-x_{3}) \Delta_{c}(z_{2}-x_{4})$$
$$= \lambda^{2} \int dz_{1} dz_{2} \int \frac{dk_{1}}{(2\pi)^{4}} \frac{dk_{2}}{(2\pi)^{4}} e^{-ik_{1}(z_{1}-z_{2})} e^{-ik_{2}(z_{1}-z_{2})} \tilde{\Delta}_{c}(k_{1}) \tilde{\Delta}_{c}(k_{2}) \times$$

54

$$\times \prod_{j=1}^{4} \left(\frac{dp_{j}}{(2\pi)^{4}} \tilde{\Delta}_{c}(p_{j}) \right) e^{-i(p_{1}(z_{1}-x_{1})+p_{2}(z_{1}-x_{2})+p_{3}(z_{2}-x_{3})+p_{4}(z_{2}-x_{4}))}$$

$$= (2\pi)^{8} \lambda^{2} \int \frac{dk_{1}}{(2\pi)^{4}} \frac{dk_{2}}{(2\pi)^{4}} \prod_{j=1}^{4} \left(\frac{dp_{j}}{(2\pi)^{4}} \tilde{\Delta}_{c}(p_{j}) \right) \delta(k_{1}+k_{2}+p_{1}+p_{2}) \delta(-k_{1}-k_{2}+p_{3}+p_{4}) \times$$

$$\times \tilde{\Delta}_{c}(k_{1}) \tilde{\Delta}_{c}(k_{2}) e^{i(p_{1}x_{1}+p_{2}x_{2}+p_{3}x_{3}+p_{4}x_{4})}$$

$$= \lambda^{2} \int \prod_{j=1}^{4} \left(\frac{dp_{j}}{(2\pi)^{4}} e^{ip_{j}x_{j}} \tilde{\Delta}_{c}(p_{j}) \right) \delta(p_{1}+p_{2}+p_{3}+p_{4}) \int dk \tilde{\Delta}_{c}(k) \tilde{\Delta}_{c}(p_{1}+p_{2}+k)$$

$$\int dk \tilde{\Delta}_{c}(k) \tilde{\Delta}_{c}(p+k) = \int dk \frac{i}{k^{2}-m^{2}+i\varepsilon} \cdot \frac{1}{(p-k)^{2}-m^{2}+i\varepsilon} \qquad (2.2.53)$$

log. div.

D.h. eine Integration entspricht nicht einer Fouriertransformation und führt zu einer (logarithmischen) Divergenz. Relevant hierfür ist letzten Endes das Auftreten des Produkts $(\Delta_c(z_1 - z_2))^2$ und irrelevant sind die äußeren Propagatoren.

Dies motiviert eine weitere Definition: Zusammenhängende¹ Diagramme ohne äußere Linien (die äußeren Linien sind "amputiert"), die zusammenhängend bleiben, wenn man *eine* Linie durchschneidet, heißen *Ein-Teilchen-irreduzibel* (oneparticle irreducible, 1PI) andernfalls *Ein-Teilchen-reduzibel*.

Kombinieren wir diese beiden Beispiele, so ist klar, daß für ein ein-Teilchenreduzibles Diagramm mögliche Divergenzen nur aus Unterdiagrammen herrühren können:

$$\Gamma = \tag{2.2.54}$$

kann nur divergent sein, wenn mindestens eines der Unterdiagramme

divergent ist; die Linie L kann keine Divergenz erzeugen.

In unserer störungstheoretischen Vorgehensweise verstehen wir Greensche Funktionen als durch die Summe der zu ihnen beitragenden Diagramme gegeben. Wir können also die Begriffe "zusammenhängend", "Ein-Teilchen-(ir)reduzibel" in diesem Sinne auf Greensche Funktionen übertragen. Eine Greensche Funktion heißt demnach zusammenhängend (Ein-Teilchen-(ir)reduzibel), wenn alle Diagramme, die zu ihr beitragen, diese Eigenschaft haben. Für das Aufspüren und Beseitigen von Divergenzen ist es also erforderlich, den Zusammenhang zwischen

¹ "zusammenhängend" haben wir oben an Beispielen der Ordnung λ^2 definiert.

diesen Typen von Greenschen Funktionen zu kennen. Ihm wenden wir uns jetzt zu.

2.3 Z, Z_c, Γ

Das erzeugende Funktional für die allgemeinen Greenschen Funktionen haben wir mit Z(J) bezeichnet (vergl. (2.2.16), aber auch (1.4.21) und (1.4.24)). Wir definieren nun durch

$$Z(J) = e^{iZ_c(J)} (2.3.1)$$

ein neues Funktional Z_c (c=connected, zusammenhängend) und wollen zeigen, daß es speziellere, nämlich die *zusammenhängenden* Greenschen Funktionen erzeugt.

Hierzu gehen wir auf die Bewegungsgleichung in Integralform (2.2.23) zurück und stellen sie graphisch dar

hierbei ist: $V'(x) = \sum v_n x^n$. Die Summe erstreckt sich über alle Beiträge zu V', aufgeschlüsselt nach der Anzahl der Ableitungen. Um aus (2.3.2) eine Gleichung für $Z_c(J)$ zu gewinnen, geben wir zunächst eine Hilfsgleichung an.

$$\frac{d^n}{(dx)^n} e^{f(x)} = e^{f(x)} (f' + \frac{d}{dx})^n \mathbf{1}$$
(2.3.3)

Also z.B. für n = 3

$$\frac{d^3}{(dx)^3}e^{f(x)} = e^{f(x)}(f' + \frac{d}{dx})(f' + \frac{d}{dx})(f' + \frac{d}{dx})\mathbf{1}$$

= $e^{f(x)}(f'^3 + 3f'f'' + f''')$ (2.3.4)

Jeder Term in $V'(\frac{\delta}{i\delta J})$ gibt demnach Anlaß zur einer Summe von Produkten von Ableitungen, die auf Z_c wirken. (Die Summe ist endlich, weil wir angenommen haben, daß V' ein Polynom ist.) So führt etwa ein einziger Term

$$V' = \left(\frac{\delta}{i\delta J}\right)^3 \tag{2.3.5}$$

zu

$$V'Z = Z\left(i^3\left(\frac{\delta Z_c}{i\delta J}\right)^3 + 3i^2\left(\frac{\delta Z_c}{i\delta J}\right)\left(\frac{\delta^2 Z_c}{i\delta J i\delta J}\right) + i\frac{\delta^3 Z_c}{i\delta J i\delta J i\delta J i\delta J}\right).$$
 (2.3.6)

2.3. Z, Z_C, Γ

Hiermit geht (2.3.2) also über in

$$\frac{\delta}{\delta J}Z_c = i \int dy \Delta_c (x-y) \left(J(y) - V' \left(\frac{\delta Z_c}{\delta J}\right) + iV_1' \left(\frac{\delta Z_c}{\delta J}\right) \frac{\delta^2 Z_c}{\delta J \delta J} - i^2 V_2' \left(\frac{\delta Z_c}{\delta J}\right) \frac{\delta^3 Z_c}{\delta J \delta J \delta J} \cdots \right)$$

$$(2.3.7)$$

Die Funktionen $V'_1(\frac{\delta Z_c}{\delta J}), V'_2(\frac{\delta Z_c}{\delta J})$ sind in Analogie zu (2.3.6) zu berechnen. In graphischer Form

$$Z_c \doteq 0, \quad \frac{\delta^4}{i\delta J(x_1)\cdots i\delta J(x_n)}Z_c \doteq 0,$$

sonst wie oben, läßt sich (2.3.7) als



wiedergeben.

Der erste Term auf der rechten Seite entspricht $i \int dy \,\Delta_c(x-y)J(y)$, der zweite $-i \int dy \,\Delta_c(x-y)V'\left(\frac{\delta Z_c}{\delta J}\right)$ usw. Es ist nun wichtig, aus der Gestalt der Graphen erstens zu erkennen, daß der Beitrag $V'(\frac{\delta Z_c}{\delta J})$ Baumstruktur hat, und zweitens, daß

alle Beiträge zusammenhängend sind, wenn Z_c d.h. \bigcirc , zusammenhängend war. Beginnen wir die Iteration, die wir ja immer zur Lösung der Gleichungen benützen, mit einer zusammenhängenden Näherung, so bleibt sie zusammenhängend. Ein Blick auf (2.3.2) im Vergleich zeigt, daß das dort *nicht* gewährleistet war.

Die Entwicklung (2.3.7) ist auch eine in geschlossenen Schleifen: die Beiträge V'_1 enthalten mindestens eine Schleife, V'_2 zwei usw. D.h. die iterative Lösung der Gleichung ist eine formale Potenzreihe in J, deren Koeffizienten eine nach Anzahl der Schleifen geordnete Reihe von zusammenhängenden Diagrammen ist.

Iterieren wir, indem wir immer nur den Beitrag V' berücksichtigen, erhalten wir alle *Baum*-Diagramme. Brechen wir in (2.3.7) die Entwicklung also nach dem

V'-Term ab und gehen wieder zur Differentialgleichung über, so entsteht

$$(\Box + m^2)\frac{\delta Z_c}{\delta J} = J - V'\left(\frac{\delta Z_c}{\delta J}\right).$$
(2.3.8)

Führen wir nun noch mit der Definition

$$\phi_c = \frac{\delta Z_c}{\delta J} \tag{2.3.9}$$

das "klassische" Feld ϕ_c ein, so ist ersichtlich, daß (2.3.8) mit der klassischen Bewegungsgleichung in Gegenwart einer Quelle zusammenfällt, d.h. die Baum-Diagramm-Näherung kann mit der klassischen Theorie in Gegenwart einer Quelle identifiziert werden.

Um die für die Renormierung wichtigste Klasse von Greenschen Funktionen beschreiben zu können, definieren wir ein Funktional, das sie erzeugt. Wir behaupten, daß die ein-Teilchen-irreduziblen Greenschen Funktionen (auch Vertexfunktionen genannt) aus den zusammenhängenden durch Legendre-Transformation gewonnen werden können. Die Definition umfaßt zwei Schritte. Im ersten wird über

$$\phi(J)(x) + \phi_o = \frac{\delta}{\delta J(x)} Z_c(J) \tag{2.3.10}$$

$$\phi_o = \frac{\delta}{\delta J(x)} Z_c(J) \Big|_{J=0}$$
(2.3.11)

eine neue Variable eingeführt. Sie ist so normiert, daß $\phi(0) = 0$ gilt. (2.3.10) ist auch tatsächlich eine sinnvolle Definition, denn man kann iterativ nach ϕ auflösen, weil in erster Näherung

$$\phi(J)(x) = \int dy \ \Delta_c(x-y)J(y) \tag{2.3.12}$$

d.h.

$$J(\phi)(x) = (\Box + m^2)\phi(x)$$
 (2.3.13)

ist. Im zweiten Schritt wird das eigentliche Vertexfunktional definiert, das ein Funktional von ϕ ist:

$$\Gamma(\phi) = Z_c(J(\phi)) - \int dx \ J(\phi)(x)(\phi(x) + \phi_o)$$
(2.3.14)

Hieraus folgt sofort

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi(x)} = -J(\phi)(x) \tag{2.3.15}$$

2.3. Z, Z_C, Γ

und

$$\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi(x) \delta(\phi)(y)} = -\frac{\delta J(\phi)(y)}{\delta \phi(x)} = -\left[\frac{\delta \phi(J)(x)}{\delta J(y)}\right]^{-1}$$
$$= -\left[\frac{\delta^2 Z_c}{\delta J(x) \delta J(y)}\right]^{-1}.$$
(2.3.16)

$$\frac{\partial^2 Z_c}{\partial J(x)\partial J(y)} = \tau_2^c(x-y) + O(J) = \tau_2(x-y) - \phi_o^2 + O(J)$$
(2.3.17)

ist die Zwei-Punkt-Funktion in Gegenwart einer Quelle J; sie ist zusammenhängend (c), weil ein möglicher Vakuumerwartungswert explizit subtrahiert ist. D.h.

$$\frac{\delta^2 \Gamma(\phi)}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} = -(\tau_2^c(x-y))^{-1} + O(\phi)$$
(2.3.18)

Da Γ eine formale Potenzreihe in ϕ ist, folgt aus (2.3.14) (und $Z(0) = 1 \leftrightarrow Z_c(0) = 0$)

$$\Gamma(0) = 0,$$
 (2.3.19)

aus (2.3.15)

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi}\Big|_{\substack{\phi=0\\J=0}} = 0. \tag{2.3.20}$$

(2.3.18) implizient also

$$\Gamma_2(x-y) = -(\tau_2(x-y))^{-1}, \qquad (2.3.21)$$

wenn wir in Γ die Beiträge 2. Ordnung explizit abtrennen gemäß

$$\Gamma(\phi) = \frac{1}{2} \int dx dy \phi(x) \phi(y) \Gamma_2(x-y) + \bar{\Gamma}(\phi)$$
(2.3.22)

$$\bar{\Gamma}(\phi) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \phi(x_n) \dots \phi(x_1) \Gamma_n(x_1, \dots x_n).$$
(2.3.23)

Eine Ableitung nach ϕ und (2.3.15) ergeben demnach

$$-J(\phi)(x) = \int dy\phi(y)\Gamma_2(x-y) + \frac{\delta}{\delta\phi(x)}\bar{\Gamma}(\phi)$$
(2.3.24)

Oder, unter Benutzung von

$$-\int dz \ \Gamma_2(x-z)\tau_2^c(z-y) = \delta(x-y)$$
(2.3.25)

$$\phi(J)(x) = \int dy \tau_2^c(x-y) \left(J(y) - \frac{\delta}{\delta\phi(y)} \bar{\Gamma}(\phi(J)) \right)$$
(2.3.26)

Da $\phi(J)$ als Ableitung von Z_c aufgefaßt werden kann, haben wir hier im Grunde eine Gleichung hergeleitet, die eine Aussage über Z_c macht. Um sie zu interpretieren, führen wir wieder graphische Symbole ein.

Die graphische Version von (2.3.26) sieht also folgendermaßen aus

$$\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{x}} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \underline{\mathbf{x}} = (2.3.27)$$

 $\phi(J)$ ist die iterative Lösung dieser Gleichung, hat also Baumstruktur, aufgebaut aus dem *vollständigen* Propagator τ_2^c und den Vertizes Γ_n . Da τ_2^c der vollständige Propagator ist, müssen die Γ_n Ein-Teilchen-irreduzibel sein, sonst könnte bei einem Iterationsschritt nicht wieder der vollständige Propagator die Teile verbinden. D.h. Γ erzeugt die ein-Teilchen-irreduziblen Greenschen Funktionen (deren zweiter Name "Vertexfunktionen" jetzt ebenfalls erklärt ist).

Für die Herleitung war wichtig, daß Γ eine formale Potenzreihe in ϕ war. Daß es ebenfalls eine formale Potenzreihe in der Anzahl der Schleifen ist, wollen wir noch klarstellen; denn hieraus folgt die wichtige Identifikationsmöglichkeit "klassische Wirkung = $\Gamma^{(o)}$ ". Wir überzeugen uns zunächst davon, daß die Schleifenordnung z.B. mit der Ordnung in \hbar einhergeht. Zu diesem Zweck müssen wir \hbar in einigen Formeln explizit angeben:

$$\langle T(\phi(x)\phi(y))\rangle = \Delta_c(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk \ e^{-ik(x-y)} \tilde{\Delta}_c(k) \tag{2.3.28}$$

$$\tilde{\Delta}_c(k) = \frac{i\hbar}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}$$
(2.3.29)

$$Z(J) = \frac{e^{\frac{i}{\hbar}\int \mathcal{L}_{int}(\frac{\hbar\delta}{i\delta J})}e^{\frac{1}{2}\int \frac{i}{\hbar}J\Delta_c\frac{i}{\hbar}J}}{\left[\qquad \dots \qquad \right]\Big|_{J=0}}$$
(2.3.30)

Eine allgemeine Greensche Funktion ist definiert als

$$\langle T(\phi(x_1)\dots\phi(x_n))\rangle = \frac{\hbar^n \delta^n}{i\delta J(x_1)\dots i\delta J(x_n)} Z(J)\Big|_{J=0}$$
(2.3.31)

Ein Beitrag zu ihr, der von einem Diagramm mit V Vertizes und L = I + NLinien herrührt (I = Anzahl der inneren Linien, N=Anzahl der äußeren Linien),

2.4. LSZ-REDUKTIONSFORMALISMUS

hat also den Faktor \hbar^{-V+L} . Aus (2.3.1) wird

$$Z = e^{\frac{i}{\hbar}Z_c} \tag{2.3.32}$$

Eine zusammenhängende Greensche Funktion ist definiert als

$$\langle T(\phi(x_1)\dots\phi(x_n))\rangle_c = \frac{\hbar^n \delta^n}{i\delta J(x_1)\dots i\delta J(x_n)} Z_c(J)\Big|_{J=0}.$$
 (2.3.33)

Wegen des Faktors $\frac{i}{\hbar}$ in (2.3.32) ergibt sich $\langle T(\phi(x_1) \dots \phi(x_n)) \rangle_c$ also als $\frac{\hbar}{i} \times$ (zusammenhängende Beiträge aus (2.3.31)). D.h. wenn das oben betrachtete Diagramm zusammenhängend war, erhält es, als Beitrag zu (2.3.32) verstanden, den Faktor $\frac{\hbar}{i}$. Das zusammenhängende Diagramm hat also die \hbar -Ordnung -V + L + 1. Der Übergang zum ein-Teilchen-irreduziblen Diagramm besteht darin, die äußeren Linien zu amputieren, wenn das so entstehende Diagramm 1PI ist. Es ist dann von der \hbar -Ordnung -V + I + 1. Die Euler-Formel

$$m = I - V + 1 \tag{2.3.34}$$

sagt aus, daß m die Anzahl der geschlossenen Schleifen ist. Also ist die \hbar -Ordnung gleich der Schleifenordnung.

Für m = 0 kann ein Ein-Teilchen-irreduzibles Diagramm keine inneren Linien haben, besteht also aus einem Punkt (in Übereinstimmung mit (2.3.34)). Wie die Definition von Γ (2.3.14) und der Vergleich mit (2.3.8) zeigt, kann also $\Gamma^{(o)}$ mit der klassischen Wirkung identifiziert werden! Dies ist ein außerordentlich nützliches Ergebnis, denn es hilft, eine ganze Anzahl schwieriger Probleme zu vermeiden. Wenn eine klassische Wirkung (oder auch Lagrangefunktion) den Übergang zur Quantenfeldtheorie dadurch gestatten soll, daß man sie als Operator im Hilbertraum interpretiert, hat man auf die Anordnung der Faktoren zu achten, kann z.B. Symmetrieoperationen nicht naiv ausführen, muß man auf den Definitionsbereich dieser Operatoren Rücksicht nehmen und dergleichen mehr. Interpretiert man die klassische Wirkung aber im obigen Sinne als niedrigste Näherung des Vertexfunktionals, so hat man nur mit klassischen Größen zu tun und darf sie naiv manipulieren. Die Wechselwirkung geht z.B. in der Form (2.3.30) ein. Natürlich bleibt die Aufgabe, das Vertexfunktional für alle Ordnungen zu konstruieren, d.h. die Divergenzen zu beseitigen und die Axiome zu überprüfen.

2.4 LSZ-Reduktionsformalismus

Unter der Bezeichnung Lehmann–Symanzik–Zimmermann–Reduktionsformalismus wird eine Methode zusammengefaßt, aus Greenschen Funktionen Informationen über Matrixelemente von Operatoren im Hilbert-Raum zu gewinnen und umgekehrt. Wir wollen sie am Beispiel des skalaren Feldes und der S-Matrix illustrieren und dann auf den Fall von Stromoperatoren verallgemeinern.

Angelpunkt dieser Methode ist die sogenannte Asymptotenbedingung. Wenn $\varphi_{\underline{ein}}(x)$ ein freies skalares Feld bezeichnet, das der Klein-Gordon-Gleichung

$$(\Box + m^2)\varphi_{\underline{ein}}(x) = 0 \tag{2.4.1}$$

genügt, $\varphi(x)$ das wechselwirkende Feld, das Lösung der wechselwirkende Theorie ist, also die gesamte dynamische Information der Theorie enthält, so soll im schwachen Limes gelten

$$\varphi(x) \to z^{1/2} \varphi_{\underline{ein}}(x) \qquad \text{für} \quad x_o \to -\infty$$
 (2.4.2)

(z: positive Zahl; "Wellenfunktionsrenormierung")

"Schwacher Limes" heißt, daß nur jedes Matrixelement von φ zum entsprechenden von $\varphi_{\underline{ein}}$ strebt, nicht aber der Operator. Der Unterschied zwischen $\varphi_{\underline{ein}}$ und φ zeigt sich auch darin, daß die gesamte Information von $\varphi_{\underline{ein}}$ durch die entsprechende Ein-Teilchen-Zustände ausgeschöpft wird, was für φ nicht der Fall ist. φ kann durchaus nicht-verschwindende Matrixelemente mit Mehr-Teilchen-Zustände haben. Analog gilt eine Asymptotenbedingung derselben Art für $x_o \to +\infty$

$$\varphi(x) \to z^{1/2} \varphi_{\underline{aus}}(x) \qquad \text{für} \quad x_o \to +\infty$$
 (2.4.3)

Auch $\varphi_{\underline{aus}}$ ist ein freies Feld der Masse m:

$$(\Box + m^2)\varphi_{\underline{aus}}(x) = 0 \tag{2.4.4}$$

z ist derselbe Faktor wie in (2.4.2).

Außerdem gehört zur Forderung der Asymptotenbedingung die Eindeutigkeit des Vakuums

$$|o,ein\rangle = |o,aus\rangle = |o\rangle. \tag{2.4.5}$$

Die Ein-Teilchen-Zustände sollen darüberhinaus stabil sein

$$|1,ein\rangle = |1,aus\rangle . \tag{2.4.6}$$

Wir betrachten nun ein Element der S-Matrix

$$\langle f, ein|S|i, ein\rangle = \langle f, aus|i, ein\rangle$$
 (2.4.7)

und wollen in der Übergangsamplitude einen "Ein-Zustand reduzieren" (die Sprechweise wird im Verlauf des Verfahrens klar werden). Der auslaufende Zustand $\langle f, aus |$ sei durch die Impulse p_1, \ldots, p_n , der einlaufende Zustand $|i, ein\rangle$ durch

2.4. LSZ-REDUKTIONSFORMALISMUS

die Impulse q_1, \ldots, q_l charakterisiert; dann gilt

$$aus \langle p_1 \dots | q_1 \dots \rangle_{ein} = aus \langle p_1 \dots | a_{ein}^{\dagger}(q_1) | q_2 \dots \rangle_{ein}$$

$$= aus \langle p_1 \dots | a_{aus}^{\dagger}(q_1) | q_2 \dots \rangle_{ein} + aus \langle p_1 \dots | a_{ein}^{\dagger}(q_1) - a_{aus}^{\dagger}(q_1) | q_2 \dots \rangle_{ein}$$

$$= aus \langle p_1 \dots p_n, -q_1 | q_2 \dots \rangle_{ein}$$

$$- i_{aus} \langle p_1 \dots | \int d^3 x_1 f_{q_1}(x_1) \stackrel{\leftrightarrow}{\partial}_o (\varphi_{\underline{ein}}(x_1) - \varphi_{\underline{aus}}(x_1)) | q_2 \dots \rangle_{ein}$$

$$(2.4.8)$$

$$(2.4.8)$$

(Hier haben wir (1.1.10) benutzt, d.h. die Möglichkeit, den Erzeuger durch das zugehörige freie Feld auszudrücken.)

Der zweite Summand ist von der Zeit unabhängig. Das können wir uns zunutze machen, indem wir für φ_{ein} die Zeit $x_1^o \to -\infty$, für $\varphi_{\underline{aus}}$ die Zeit $x_1^o \to +\infty$ gehen lassen und dann die Asymptotenbedingung benutzen. Wir erhalten für diese beiden Summanden

$$\frac{i}{\sqrt{z}} \left(\lim_{x_1^o \to +\infty} - \lim_{x_1^o \to -\infty} \right) \int d^3 x_1 f_{q_1}(x_1) \stackrel{\leftrightarrow}{\partial}_{o \ aus} \langle p_1 \dots | \varphi(\mathbf{x}_1, x_1^o) | q_2 \dots \rangle_{ein} \\
= \frac{i}{\sqrt{z}} \int d^4 x \partial_o \left(f_{q_1}(x_1) \stackrel{\leftrightarrow}{\partial}_{o \ aus} \langle p_1 \dots | \varphi(\mathbf{x}_1, x_1^o) | q_2 \dots \rangle_{ein} \right)$$
(2.4.10)

denn

$$\lim_{t \to +\infty} \int d^3 x \psi(\mathbf{x}, t) - \lim_{t \to -\infty} \int d^3 x \psi(\mathbf{x}, t) = \lim_{\substack{t_f \to +\infty \\ t_i \to -\infty}} \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{\partial}{\partial t} \int d^3 x \psi(\mathbf{x}, t) \quad (2.4.11)$$

Der erste Summand in (2.4.9) trägt nur bei, falls ein auslaufender Impuls genau q_1 ist – d.h. wenn ein Teilchen nicht am Streuprozeß teilnimmt. Mit der Interpretation in Feynman-Diagrammen im Sinn sprechen wir von unzusammenhängenden Beiträgen (u.B.).

$$_{aus}\langle p_1\dots p_n, -q_1|q_2\dots\rangle_{ein} = \sum_{k=1}^n \delta^{(3)}(\mathbf{p}_k - \mathbf{q}_1)_{aus}\langle p_1\dots \check{p}_k\dots | q_2,\dots\rangle_{ein} \quad (2.4.12)$$

(heißt: entsprechender Impuls fehlt).

Wir werden diese Beiträge im folgenden nicht explizit aufführen. Wir sind also bei der Gleichung

$$aus \langle p_1 \dots | q_1 \dots \rangle_{ein} = u.B. + \frac{i}{\sqrt{z}} \int d^4 x_1 \partial_o \left(f_{q_1}(x_1) \stackrel{\leftrightarrow}{\partial}_o \times \\ \times_{aus} \langle p_1 \dots | \varphi(x_1) | q_2 \dots \rangle_{ein} \right)$$
(2.4.13)

angelangt. Mit der Annahme, daß wir mit Hilfe von $f_{q_1}(x_1)$ Wellenpakete konstruiert haben, dürfen wir in (2.4.13) partiell über den Raum integrieren und

erhalten

$$\int d^{4}x_{1}\partial_{o}\left(f_{q_{1}}(x_{1})\stackrel{\leftrightarrow}{\partial}_{o}aus\langle\ldots|\varphi(x_{1})|\ldots\rangle_{ein}\right)$$

$$=\int d^{4}x_{1}\partial_{o}\left(-\partial_{o}f_{q_{1}}(x_{1})\langle\ldots|\varphi(x_{1})|\ldots\rangle+f_{q_{1}}(x_{1})\langle\ldots|\partial_{o}\varphi|\ldots\rangle\right)$$

$$=\int d^{4}x_{1}\left(-\partial_{o}^{2}f_{q_{1}}(x_{1})\langle\ldots|\varphi(x_{1})|\ldots\rangle+f_{q_{1}}(x_{1})\langle\ldots|\partial_{o}^{2}\varphi|\ldots\rangle\right) \qquad (2.4.14)$$

$$=\int d^{4}x_{1}\left((-\Delta+m^{2})f_{q_{1}}(x_{1})\langle\ldots|\varphi(x_{1})|\ldots\rangle+f_{q_{1}}(x_{1})\langle\ldots|\partial_{o}^{2}\varphi|\ldots\rangle\right)$$

$$=\int d^{4}x_{1}f_{q_{1}}(x_{1})aus\langle\ldots|(\Box+m^{2})\varphi(x_{1})|\ldots\rangle_{ein}$$

Einschließlich aller Faktoren gilt also

$$aus \langle p_1 \dots | q_1 \dots \rangle_{ein} = u.B. + \frac{i}{\sqrt{z}} \int d^4 x_1 e^{-iq_1 x_1} (\Box_{x_1} + m^2) \times \\ \times aus \langle p_1 \dots p_n | \varphi(x_1) | q_2 \dots q_l \rangle_{ein}$$
(2.4.15)

(Hier haben wir das Wellenpaket wieder durch die ebene Welle ersetzt: $f_{q_1}(x_1) = e^{-iq_1x_1}$.)

Als Ergebnis können wir festhalten, daß ein einlaufendes Teilchen im wesentlichen durch den Klein-Gordon-Operator wirkend auf ein volles d.h. wechselwirkendes Feld φ ersetzt ist. Als nächstes wollen wir nun einen Aus-Zustand reduzieren. Wir schreiben also

$$aus \langle p_1 \dots p_n | q_1 \dots q_l \rangle_{ein}$$

$$= u.B. + \frac{i}{\sqrt{z}} \int d^4 x_1 f_{q_1}(x_1) (\Box_{x_1} + m^2)_{aus} \langle p_2 \dots p_n | a_{aus} \varphi(x_1) | q_2 \dots \rangle_{ein}$$
(2.4.17)

$$= u.B. + \frac{i}{\sqrt{z}} \int \dots \left(aus \langle p_2 \dots p_n | a_{aus} \varphi(x_1) - \varphi(x_1) a_{ein}(p_1) | q_2 \dots \rangle_{ein} + aus \langle p_2 \dots p_n | \varphi(x_1) | - p_1, q_2 \dots \rangle_{ein} \right)$$

$$= u.B. + \frac{i}{\sqrt{z}} \int \dots \left(i \int d^3 y_1 \langle p_2 \dots p_n | \varphi_{\underline{aus}}(y_1) \varphi(x_1) - \varphi(x_1) \varphi_{\underline{ein}}(y_1) | q_2 \dots \rangle \times \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{y_1^o} f_{p_1}^*(y_1) \right)$$

$$(2.4.19)$$

Hier ist der dritte Term von (2.4.18) wieder unter u.B. subsumiert worden. Wir
2.4. LSZ-REDUKTIONSFORMALISMUS

benutzen die Asymptotenbedingung für $y_1^o \to \pm \infty$ und erhalten

$$= u.B. + \frac{i}{\sqrt{z}} \int \dots \frac{i}{\sqrt{z}} \int d^{3}y_{1} \Big(\lim_{y_{1}^{o} \to +\infty} \langle \dots | \varphi(y_{1})\varphi(x_{1}) | \rangle \stackrel{\leftrightarrow}{\partial}_{y_{1}^{o}} f_{p_{1}}^{*}(y_{1}) \\ - \lim_{y_{1}^{o} \to -\infty} \langle \dots | \varphi(x_{1})\varphi(y_{1}) | \rangle \stackrel{\leftrightarrow}{\partial}_{y_{1}^{o}} f_{p_{1}}^{*}(y_{1}) \Big)$$

$$= u.B. + \frac{i}{\sqrt{z}} \int \dots \frac{i}{\sqrt{z}} \int d^{3}y_{1} \langle \dots | \left(\lim_{y_{1}^{o} \to +\infty} - \lim_{y_{1}^{o} \to -\infty} \right) T\left(\varphi(y_{1})\varphi(x_{1})\right) | \rangle \times \\ \times \stackrel{\leftrightarrow}{\partial}_{y_{1}^{o}} f_{p_{1}}^{*}(y_{1})$$

$$(2.4.20)$$

(denn im ersten Summanden ist $y_1^o > x_1^o$ während im zweiten $y_1^o < x_1^o$ ist.) Die Differenz der Limiten können wir wie oben als Integral über die Zeitableitung schreiben und finden damit

$$= u.B. + \left(\frac{i}{\sqrt{z}}\right)^2 \int dy_1 dx_1 f_{q_1}(x_1) \overrightarrow{(\Box_{x_1} + m^2)}_{aus} \langle p_2 \dots p_n | T\left(\varphi(y_1)\varphi(x_1)\right) \times \langle q_2 \dots q_n \rangle_{ein} \overleftarrow{(\Box_{y_1} + m^2)} f_{p_1}^*(y_1)$$

$$(2.4.22)$$

Allgemein gilt demnach

$$aus \langle p_1 \dots p_n | q_1 \dots q_l \rangle_{ein} = {}_{ein} \langle p_1 \dots p_n | S | q_1 \dots q_l \rangle_{ein}$$

$$= u.B. + \left(\frac{i}{\sqrt{z}}\right)^{n+l} \int d^4 y_1 \dots d^4 x_l e^{i\sum_{k=1}^n p_k y_k - i\sum_{j=1}^l q_j x_j} \times (\Box_{y_1} + m^2) \dots (\Box_{x_l} + m^2) \langle o | T (\varphi(y_1) \dots \varphi(x_l)) | o \rangle_c$$

$$(2.4.23)$$

Verstehen wir nun unter $\langle o | T (\varphi(y_1) \dots \varphi(x_l)) | o \rangle$ die allgemeine Greensche Funktion (die auch unzusammenhängende Beiträge hat), so können wir zusammenfassen

$$e_{in} \langle p_1 \dots p_n | S | q_1 \dots q_l \rangle_{e_{in}} = \left(\frac{i}{\sqrt{z}}\right)^{n+l} \int d^4 y_1 \dots d^4 x_l e^{i\sum_{k=1}^n p_k y_n - i\sum_{j=1}^l q_j x_j} \times (2.4.24) \times (\Box_{y_1} + m^2) \dots (\Box_{x_l} + m^2) G(y_1 \dots y_n, x_1 \dots x_l) = \left(\frac{-i}{\sqrt{z}}\right)^{n+l} \lim \prod_{k=1}^n (p_k^2 - m^2) \prod_{j=1}^l (q_j^2 - m^2) \tilde{G}(-p_1 \dots - p_n, q_1 \dots q_l) \quad (2.4.25)$$

(mit lim : $p_k^2 \to m^2$, $q_j^2 \to m^2$, $p_k^o > 0$, $q_j^o > 0$). Das Resultat kann demnach folgendermaßen interpretiert werden: die Elemente der S-Matrix ergeben sich aus den allgemeinen Greenschen Funktionen durch

Multiplikation mit den inversen Propagatoren ("Amputation der äußeren Beine"), Multiplikation mit Potenzen der Wurzel aus der Wellenfunktionsrenormierung und Wahl der Impulswerte $p_k^2 = m^2$, $q_j^2 = m^2 \quad \forall k, j$ ("Setzen auf die Massenschale"). Die Wellenfunktionsrenormierung z ist dabei definiert als das Residuum der Zwei-Punkt-Funktion am Pol der physikalischen Masse:

$$G(x,y) = \frac{i\hbar}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{ip(x-y)} \frac{z}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \left(1 + O(p^2 - m^2)\right)$$
(2.4.26)

Jede Konstruktion der Greenschen Funktionen impliziert demnach eine der S-Matrix (vorausgesetzt, daß der Limes der Massenschale existiert – letzteres ist nicht-trivial im Fall masseloser Teilchen).

Man kann das obige Ergebnis für die S-Matrix auf den Fall eines Operators $\mathcal{O}(x)$ verallgemeinern, der z.B. ein Polynom in den wechselwirkenden Feldern und deren Ableitungen ist. Die Matrixelemente des Operators $\mathcal{O}(x)$ ergeben sich demnach aus seinen Greenschen Funktionen mit elementaren Feldern auf die folgende Art und Weise:

$$\langle p_1 \dots p_n | \mathcal{O}(x) | q_1 \dots q_l \rangle = \lim \left(\frac{-i}{\sqrt{z}} \right)^{n+l} \prod_{i=1}^n (p_i^2 - m^2) \prod_{j=1}^l (q_j^2 - m^2) G_{\mathcal{O}(x)}(-p_1 \dots - p_n, q_1 \dots q_l)$$
(2.4.27)

mit lim : $p_i^2 \to m^2$, $q_j^2 \to m^2$, $p_i^o > 0$, $q_j^o > 0$. $\tilde{G}_{\mathcal{O}(x)}$ ist die Fouriertransformierte von

$$G_{\mathcal{O}(x)}(y_1 \dots y_n, x_1 \dots x_l) = \langle T\mathcal{O}(x)\varphi(y_1) \dots \varphi(x_l) \rangle$$
(2.4.28)

Störungstheoretisch ist diese Greensche Funktion mit Einsetzung z.B. über die Gell-Mann-Low-Formel (und einem Renormierungsverfahren R) definiert

$$\langle T\mathcal{O}(x)\varphi(y_1)\dots\varphi(x_l)\rangle = R\langle T : \mathcal{O}^{(o)}(x) : \varphi^{(o)}(y_1)\dots\varphi^{(o)}(x_l)e^{\frac{i}{\hbar}\int\mathcal{L}_{int}^{(o)}}\rangle_{(o)}$$
(2.4.29)

(Vakuum-zu-Vakuum Diagramme werden weggelassen)

2.5 Bibliographische Angaben

Die Diskussion der S-Matrix in der vorliegenden Form folgt Bogoliubov/Shirkov mit Anleihen bei Epstein/Glaser (Erice). (Letzteres aber aufbereitet in einer nicht publizierten Vorlesung von P. Breitenlohner.) Das Beispiel φ und die Lösung $\hat{\varphi}$ (2.1.49) sind von Stora 73 behandelt worden. Das Wicksche Theorem wird ausführlich bei Bogoliubov/Shirkov abgehandelt. Becchi 83 gibt die formale Bewegungsgleichung (2.2.22) für das erzeugende Funktional Greenscher Funktionen an. Ihm folgen wir auch in der Herleitung von Γ aus Z_c bzw. Z (Abschnitt 2.3). Der LSZ-Formalismus ist in Bjorken/Drell II und Gasiorowicz breit dargestellt.

Kapitel 3 Regularisierung, Renormierung

Für gegebene Wechselwirkung liefert die Formel (2.2.31) oder (2.2.33) zusammen mit dem Wickschen Theorem (2.2.13) störungstheoretisch und formal definierte Greensche Funktionen, die ihrerseits wieder als Summe von Feynman-Diagrammen dargestellt werden können. Divergenzen rühren ausschließlich von Ein-Teilchen-irreduziblen Diagrammen her. Jede ad-hoc-Definition, die alle Diagramme endlich macht, heißt *Regularisierung*. Erfüllen die Greenschen Funktionen (u.U. erst nach weiteren Abänderungen der Wechselwirkung oder der Berechnungsvorschriften) alle Axiome (s. Abschnitt 2.1) so sprechen wir von einer *Renormierung*. Renormierte Greensche Funktionen sind also endlich und erfüllen alle Axiome, regularisierte erfüllen nicht alle Axiome, sind aber endlich und erfüllen verlauben daher im allgemeinen naive Manipulationen. Im Abschnitt 3.1 wollen wir einige gängige Regularisierungsverfahren, im Abschnitt 3.2 ein Renormierungsverfahren diskutieren.

3.1 Regularisierungen

Einige häufig benutzte Verfahren, divergente Diagramme endlich zu machen, sind die folgenden:

Pauli-Villars: man ersetze Propagatoren $\frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}$ durch $\frac{m^2 - \Lambda^2}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)(k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon)}$ und betrachte, wenn Konvergenz hergestellt ist, den Limes $\Lambda^2 \to \infty$; analytische: man ersetze Propagatoren $\frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}$ durch $\frac{1}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)^{\lambda}}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ und betrachte, wenn Konvergenz hergestellt ist, den Limes $\lambda \to 1$; dimensionaler in der Letzer time in

dimensionale: in der Integration über innere Impulse setze man $\int d^4k$ auf $\int d^nk$ mit $n \in \mathbb{C}$ fort und betrachte, wenn Konvergenz hergestellt ist, den Limes $n \to 4$.

3.2 Impulssubtraktionen

In diesem Abschnitt wollen wir ein Verfahren vorstellen, bei dem Konvergenz von Feynman-Diagrammen dadurch erzeugt wird, daß man geeignet gewählte Impulssubtraktionen vornimmt. Für die allgemeine Vorschrift sind einige Vorbereitungen erforderlich, die zuerst motiviert werden sollen.

3.2.1 Divergenzgrad (für Ultraviolettdivergenzen) Vorgehen für Ein-Schleifen-Diagramme

Um abschätzen zu können, wie stark ein 1PI-Diagramm für große innere Impulse divergiert, benötigen wir das entsprechende Verhalten der freien Propagatoren und den Effekt etwaiger weiterer Divergenz-erzeugender Faktoren. Ein Blick auf die freien Propagatoren (s. Abschnitt (1)) zeigt

Während in der $\varphi^4\text{-}\mathrm{Theorie}$ und in der Spinor-QED die Vertizes nur Konstante im Impulsraum beitragen

können Vertizes der skalaren QED Impulsfaktoren liefern

Für die gesuchte Abschätzung können wir also ein allgemeines (1PI) Feynman-Diagramm γ als Produkt der inneren Linien und der Polynome an den Vertizes ansehen. Im Fourierraum hat der Integrand $I_{\gamma}(k, p)$ die Form

$$I_{\gamma}(k,p) = \prod_{l \in \mathcal{L}} \Delta_c(k,p) \prod_{V \in \mathcal{V}} P_V(k,p)$$
(3.2.4)

Hierbei bezeichnet \mathcal{L} die Menge der inneren Linien, \mathcal{V} die Menge der Vertizes; k steht für die inneren Impulse (über die integriert wird), p für die äußeren Impulse des Diagramms. Die Anzahl der unabhängigen Schleifen sei m; sie ist gleich der Anzahl der Integrationen. Der Grad von I_{γ} in k ist demnach

$$deg_k I_{\gamma}(k,p) = -2I_B - I_F + \sum_{V \in \mathcal{V}} degr(V)$$
(3.2.5)

 I_B = Anzahl der inneren Boson-Linien

 I_F = Anzahl der inneren Fermion-Linien

degr(V) = Potenz der Impulse am Vertex V

Die k-Dimension des Integranden einschließlich des Integrationsvolumens ist also

$$d(\gamma) = 4m - 2I_B - I_F + \sum_{V \in \mathcal{V}} degr(V)$$
 . (3.2.6)

Um diese Formel in eine Form zu bringen, die unabhängig von der inneren Struktur des Diagramms ist, führen wir die Anzahl der äußeren Linien des jeweiligen Feldtyps ein

 $N_{\varphi,\psi,v}=$ Anzahl der skalaren, spinoriellen, vektoriellen
 $\ddot{a}u\beta eren$ Linien des Diagramms γ

und geben entsprechende topologische Relationen an

$$4V_{\varphi} = 2I_{\varphi} + N_{\varphi}$$

$$2V_{e} = 2I_{\psi} + N_{\psi}$$

$$V_{e} = 2I_{A} + N_{A}$$

(3.2.7)

(Ein φ^4 -Vertex V_{φ} "ist 4 φ -Linien wert"; ein QED-Vertex V_e "ist 2 ψ -Linien und 1 Vektor-Linie wert".)

Bezeichnet $n_a(V)$ die Anzahl der Linien vom Typ a am Vertex V, so lassen sich die Relationen (3.2.7) zu

$$\sum_{V} n_a(V) = 2I_a + N_a \tag{3.2.8}$$

zusammenfassen. Außerdem gilt die Euler-Formel

$$m = I - V + 1 \tag{3.2.9}$$

(I : alle inneren Linien; V : alle Vertizes). Hiermit läßt sich nun (3.2.6) in gewünschter Weise umformen

$$d(\gamma) = 4I - 4V + 4 - 2I_B - I_F + \sum_{V \in \mathcal{V}} degr(V)$$

= $4 + 2I_B + 3I_F + \sum_{V \in \mathcal{V}} (degr(V) - 4)$
= $4 - N_B - \frac{3}{2}N_F + \sum_{V \in \mathcal{V}} \left(degr(V) - 4 + n_B(V) + \frac{3}{2}n_F(V) \right)$ (3.2.10)

Definieren wir $d_a :=$ UV-Dimension des Feldes vom Typ a, $d_V :=$ UV-Dimension des Vertex V, so gilt

$$d_{\varphi} = d_A = 1$$
 $d_{\psi} = \frac{3}{2}$ (3.2.11)

$$d_{V} = \sum_{a} d_{a} n_{a}(V) + degr(V)$$
(3.2.12)

und für $d(\gamma)$ folgt

$$d(\gamma) = 4 - \sum_{a} d_a N_a(\gamma) + \sum_{V \in \mathcal{V}(\gamma)} (d_V - 4).$$
(3.2.13)

Als Beispiele betrachten wir:

1. Die Vertexkorrektur in der φ^4 -Theorie

$$\lambda^{2} \int dk \frac{1}{(p-k)^{2} - m^{2}} \frac{1}{k^{2} - m^{2}}$$
naives Verhalten: $k^{4} \quad k^{-2} \quad k^{-2} \quad : \quad (k)^{o} \doteq (ln \frac{p^{2}}{m^{2}})^{x}$
Formel: $d_{V}(\varphi^{4}) = 1 \cdot 4 + 0 = 4$

$$\sum_{a} d_{a} N_{a}(\gamma) = 1 \cdot 4 = 4 \qquad (3.2.14)$$
 $d(\gamma) = 4 - 4 + 0 = 0$

2. Die Korrektur zum Fermionpropagator

$$e^{2} \int dk \frac{\gamma_{\mu}(\not k - m)\gamma_{\nu}}{k^{2} - m^{2}} g^{\mu\nu} \frac{1}{(p-k)^{2}}$$
naives Verhalten: $k^{4} \quad k^{-1} \qquad k^{-2} \qquad : \quad (k)^{1}$

Formel:

$$d_V(\bar{\psi}A^{\mu}\gamma_{\mu}\psi) = 2 \cdot \frac{3}{2} + 1 \cdot 1 + 0 = 4$$

$$\sum_a d_a N_a(\gamma) = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$$

$$d(\gamma) = 4 - 3 + 0 = 1$$
(3.2.15)

3. Die Korrektur zum Photonpropagator

$$\sim e^2 \int dk \frac{Tr \gamma_{\mu}(\not k - m) \gamma_{\nu}(\not p - \not k - m)}{(k^2 - m^2) \left((p - k)^2 - m^2\right)}$$

naives Verhalten: $k^4 \qquad k^{-2} \qquad : \quad (k)^2$

Formel:
$$\sum_{a} d_{a} N_{a}(\gamma) = 1 \cdot 2 = 2$$

$$d(\gamma) = 4 - 2 + 0 = 2$$
(3.2.16)

Die Beispiele belegen, daß die Umformungen, die zu (3.2.13) geführt haben, korrekt waren und daß $d(\gamma) \ge 0$ den *Divergenzgrad* des jeweiligen Diagramms angibt. Beispiel (1) ist logarithmisch, (2) linear, (3) quadratisch divergent.

Um die Divergenzen in diesen einfachen Beispielen zu beseitigen, entwickeln wir die Integranden in den äußeren Impulsen: Beispiel (1):

$$I_{\gamma}(p,k) = \lambda^{2} \frac{1}{(p-k)^{2} - m^{2}} \frac{1}{k^{2} - m^{2}}$$

$$= \lambda^{2} \frac{1}{(k^{2} - m^{2})^{2}} + \lambda^{2} p^{\mu} \left[\frac{-2(p-k)_{\mu}}{\left((p-k)^{2} - m^{2}\right)^{2}(k^{2} - m^{2})} \right]_{p=0} + \cdots$$

$$= I_{\gamma}(0,k) + p^{\mu} \left[\partial_{p^{\mu}} I_{\gamma}(p,k) \right]_{p=0} + \cdots$$
(3.2.17)

Divergent ist hier der *p*-konstante Term, während bereits die erste *p*-Ableitung konvergent ist. D.h. wegen der speziellen Form der Propagatoren – sie sind rationale Funktionen – "erzeugt" die Ableitung ∂_p Konvergenz. Wir können diese Feststellung, die wegen möglicher Singularitäten im Minkowski-Raum noch etwas vage ist, präzisieren, indem wir eine spezielle ε -Vorschrift benutzen (Zimmermann 68)

$$\frac{1}{k^2 - m^2} \to \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon(\mathbf{k}^2 + m^2)}.$$
 (3.2.18)

Dann hat der Minkowski-Integrand eine Euklidsche Majorante

$$\left|\frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon(\mathbf{k}^2 + m^2)}\right| \le \left(\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon^2}}\right) \frac{1}{k_o^2 + \mathbf{k}^2 + m^2} \tag{3.2.19}$$

und man kann damit sofort zeigen, daß $\int dk \left(I_{\gamma}(p,k) - I_{\gamma}(0,k)\right)$ absolut konvergiert.

(Mit (3.2.18) haben wir zwar die Lorentzinvarianz gebrochen, aber sie wird wieder hergestellt im Limes $\varepsilon \to 0$. (Lowenstein/Speer 75).)

Im Beispiel (2) gilt entsprechend

$$I_{\gamma}(p,k) = e^{2} \frac{\gamma_{\mu}(\not{k} - m)\gamma_{\nu}}{k^{2} - m^{2}} g^{\mu\nu} \frac{1}{k^{2}} \qquad \rightarrow \quad d = 1$$

$$+ e^{2} p^{\lambda} \frac{\gamma_{\mu}(\not{k} - m)\gamma_{\nu}}{k^{2} - m^{2}} g^{\mu\nu} \left[\frac{-2(p-k)_{\lambda}}{(p-k)^{2\cdot 2}} \right]_{p=0} \qquad \rightarrow \quad d = 0$$

$$+ e^{2} \frac{1}{2} p^{\lambda} p^{\rho} \frac{\gamma_{\mu}(\not{k} - m)\gamma_{\nu}}{k^{2} - m^{2}} g^{\mu\nu} \frac{-2g_{\rho\lambda}k^{2} + 8k_{\lambda}k_{\rho}}{(k^{2})^{2}} \qquad \rightarrow \quad d = -1$$

$$+ \cdots \qquad (3.2.20)$$

D.h. jede Ableitung nach p erniedrigt den Divergenzgrad um 1; denn die Integranden sind homogen in p, k und m.

Wir haben damit als Resultat gefunden, daß der divergente Anteil von $I_{\gamma}(p,k)$ ein Polynom in den äußeren Impulsen vom Grad des Divergenzgrades $d(\gamma)$ ist. Definieren wir also jetzt

$$R_{\gamma}(p,k) := I_{\gamma}(p,k) - t_{p\gamma}^{d(\gamma)} I_{\gamma}(p,k)$$
(3.2.21)

wobei $t_{p\gamma}^{d(\gamma)} = \sum_{n \le d(\gamma)} \frac{1}{(n!)} p^n \frac{d^n}{(dp)^n} \Big|_{p=0}$ der Taylor-Operator in den äußeren Impulsen bis einschließlich der Ordnung $d(\gamma)$ ist, so gilt der

Satz: Mit der ε -Vorschrift (3.2.18) ist $\int d^4k R_{\gamma}(p,k)$ absolut konvergent.

Alle 1PI Ein-Schleifen-Diagramme können so konvergent gemacht werden. Als physikalische Aufgabe haben wir uns für diese mathematische ad hoc-Vorschrift eingehandelt zu zeigen, daß diese Subtraktionen einer erlaubten Definition des *T*-Produktes entsprechen. Hierzu ändern wir den Blickwinkel und stellen fest, daß in der Definition (3.2.21) gerade über ein Polynom vom Grad $d(\gamma)$ als Stammfunktion verfügt worden ist. Die Subtraktionen legen nämlich für $\int dk R_{\gamma}(p,k)$ fest, daß

$$\int R_{\gamma}(o,k) = \int R'_{\gamma}(o,k) = \dots = \int R^{(d)}_{\gamma}(o,k) = 0 .$$
 (3.2.22)

Ein solches Polynom in äußeren Impulsen entspricht aber genau lokalen Vertizes in \mathcal{L}_c (c für counterterm) mit einem Koeffizienten der Ordnung \hbar . Beispiel (1)

$$\mathcal{L}_{c} = \frac{c}{4!} \hbar \lambda^{2} \varphi^{4} \longrightarrow i \hbar c \lambda^{2} \cdot 1 \quad \text{(Impulsraum)}$$

für das triviale Feynman-Diagramm

D.h. die willkürliche Festlegung von $\int R_{\gamma}(o,k) = 0$ entspricht dem und kann rückgängig gemacht werden durch das Verfügen über c in \mathcal{L}_c (in der Wechselwirkung). Beispiel (2)

$$\mathcal{L}_c = e^2 \hbar (ai\bar{\psi} \ \partial \psi - \delta m \bar{\psi} \psi) \tag{3.2.24}$$

regelt die Normierung von $\Gamma_{\psi\bar{\psi}}|_{p=0}$ und $\partial_p\Gamma_{\psi\bar{\psi}}|_{p=0}$ und entspricht einem Polynom, vom Grad 1 in p. Diagrammatisch

 $\begin{array}{cccc} & & & & \\ & & & \\ & & & \\ \delta m & & & a \not p \end{array}$

Natürlich haben wir mit diesen Überlegungen nicht gezeigt, daß auch der divergente Anteil, über den in (3.2.21) gewissermaßen verfügt wird, nur einer Definition des *T*-Produkts entspricht. So weit dies überhaupt ein mathematisch (und physikalisch) wohldefiniertes Problem ist, kann man es in einer expliziten Regularisierung studieren. Entsprechend zu (3.2.23) und (3.2.24) zeigt man dann, daß geeignet gewählte Gegenterme mit regulatorabhängigen Koeffizienten die Divergenzen der Diagramme, die ja ebenfalls mit den Regulatoren parametrisiert sind, genau kompensieren. Die verbleibenden, nicht-festgelegten endlichen Beiträge werden dann wie oben durch endliche Gegenterme normiert.

Damit ist gezeigt, daß die Definition (3.2.21) in der Tat eine erlaubte Festlegung des *T*-Produktes (nämlich über eine Wechselwirkungs-Lagrangefunktion) darstellt.

3.2.2 Nicht-Überlappende Divergenzen. Impulsfluß

Für Diagramme mit mehr als einer Schleife, also etwa vom Typ



(die zum Beispiel (2) beitragen) sollte man rekursiv vorgehen können : man macht erst die Unterdiagramme¹ gemäß (3.2.21) konvergent, subtrahiert dann das Diagramm – mit subtrahierten Unterdiagramm – wieder gemäß (3.2.21) und erwartet absolute Konvergenz. Am Beispiel Fig. 3.2. (b) wollen wir uns den Sachverhalt etwas detaillierter ansehen. Das Unterdiagramm λ



¹Ein Unterdiagramm λ von γ wird aufgespannt von Linien $\mathcal{L}(\lambda) \subset \mathcal{L}(\gamma)$.

ist quadratisch divergent:

$$R_{\lambda}(p^{\lambda}, k^{\lambda}) = (1 - t_{p^{\lambda}}^2) I_{\lambda}(p^{\lambda}, k^{\lambda}).$$
(3.2.25)

Für großen äußeren Impuls, d.h. für ρp^{λ} mit $\rho \to \infty$, wächst $\int d^4 k^{\lambda} R_{\lambda}(p^{\lambda}, k^{\lambda})$ wie $\rho^2 p^2 (\ln \frac{\rho p}{m})^{\alpha}, \alpha > 0$ ("Power counting theorem"; Weinberg 60, Zimmermann 68). Im Diagramm γ



trägt λ zusammen mit seinen äußeren Linien also den Faktor ~ $\frac{1}{k^2}(\ln \frac{k}{m})^{\alpha}$ bei d.h. das Verhalten gegenüber



ist nur um den logarithmischen Faktor $(\ln \frac{k}{m})^{\alpha}$ abgeändert. Der Abfall des Integranden mit der *Potenz* k^{-2} ist also nur unwesentlich korrigiert. Wenn es also gelingt, die jeweils inneren Impulse so zu parametrisieren, daß die des Unterdiagramms nur Funktionen der inneren Impulse des Diagramms sind, dann folgt aus der absoluten Konvergenz die Unabhängigkeit von der Reihenfolge der Integrationen und damit vom Impulsfluß. Solange alle divergenten 1PI-Unterdiagramme $\lambda_i \subset \gamma$ entweder

$$\lambda_i \cap \lambda_j = \emptyset \tag{3.2.26}$$

oder
$$\lambda_i \subset \lambda_j$$
 (3.2.27)

oder
$$\lambda_i \supset \lambda_j$$
 erfüllen, (3.2.28)

(das gilt gerade für die Beispiele Bild 3.2) sollten keine ernsthaften Schwierigkeiten auftreten. Dieser Fall wird von der Dysonschen Formel beschrieben:

$$R_{\gamma} = S_{\gamma} \prod_{\lambda \in U} (1 - t_{p\lambda}^{d(\lambda)}) S_{\lambda} I_{\gamma}(\hat{U})$$
(3.2.29)

Hierbei ist $U = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_c\}$ und der Operator $(1 - t_{p^{\lambda_1}}^{d(\lambda_1)})$ steht rechts von $(1 - t_{p^{\lambda_2}}^{d(\lambda_2)})$, wenn $\lambda_1 \subset \lambda_2$ gilt. S_{λ} ist ein Substitutionsoperator, der die Impulse geeignet umbenennt:

$$[Sf](p^{\gamma},k) = f\left(p^{\lambda}(p^{\gamma},k),k\right)$$
(3.2.30)

für eine beliebige Funktion f von p^{λ} und k.

Die Funktion $I_{\gamma}(\hat{U})$ ist der Integrand des Diagramms γ mit den Impulsbezeichnungen gemäß dem kleinsten Unterdiagramm, in dem die entsprechende Linie oder der entsprechende Vertex auftritt.

Es ist klar, daß wir spätestens an dieser Stelle den Impulsfluß präzise angeben müssen. Das soll nunmehr geschehen. Wir definieren den *Standard-Impulsfluß* für ein 1PI Diagramm Γ und seine Unterdiagramme. $\{p\} = \{p_1, \ldots, p_n\}$ sei eine Basis für die äußeren Impulse von $\Gamma, \{k\} = \{k_1, \ldots, k_m\}$ eine Basis der inneren Impulse (die die Integrationsvariablen darstellen), wobei k_i der i-ten Schleife C_i von Γ zugeordnet sei. Bezeichnet $L_{ab\nu}$ die ν -te Linie, die den Vertex V_b mit dem Vertex V_a verbindet, so schreiben wir den Impuls $l_{ab\nu}$, der durch diese Linie fließt, als Linearkombination

$$l_{ab\nu} = q_{ab\nu}(p) + k_{ab\nu}(k) \tag{3.2.31}$$

und legen deren Anteile folgendermaßen fest:

$$k_{ab\nu} = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_{ab\nu i} k_i \tag{3.2.32}$$

mit
$$\varepsilon_{ab\nu i} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } L_{ab\nu} \in C_i \text{ (einschl. Orientierung!)} \\ -1 & \text{wenn } L_{ba\nu} \in C_i \text{ ````} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

 $q_{ab\nu}(p)$ wird fixiert mit Hilfe der "Kirchhoffschen Gesetze":

$$\sum_{b,\nu} q_{ba\nu} + q_a = 0 \qquad \forall \ V_a \in \mathcal{V}(\Gamma), \tag{3.2.33}$$

$$\sum_{L_{ab\nu}\in C} r_{ab\nu} q_{ab\nu} = 0 \qquad \forall \text{ Schleifen } C \text{ von } \Gamma, \qquad (3.2.34)$$

wobei q_a die Summe der bei V_a einfließenden äußeren Impulse darstellt und die Orientierung von $L_{ab\nu}$ zu beachten ist.

Hierbei dürfen die "Widerstände" $r_{ab\nu} = r_{ba\nu}$ beliebig gewählt werden, vorausgesetzt, es entstehen keine geschlossenen Schleifen von Linien mit Widerstand 0 oder ∞ . (Es ist natürlich von Vorteil, möglichst viele Widerstände 0 oder ∞ zu wählen.)

Wegen der Rekursivität der Subtraktionsprozedur benötigen wir auch eine Vorschrift für den Impulsfluß durch eine Linie $L_{ab\nu}$ in einem Unterdiagramm $\gamma \subset \Gamma$. Zunächst gilt wie für alle Diagramme

$$l_{ab\nu}^{\gamma} = q_{ab\nu}^{\gamma}(p^{\gamma}) + k_{ab\nu}^{\gamma}(k), \qquad (3.2.35)$$

wobei $q_{ab\nu}^{\gamma}$ durch die Einschränkung der Kirchhoffschen Gesetze auf γ bestimmt ist:

$$\sum_{b,\nu} q_{ab\nu}^{\gamma} + q_a^{\gamma} = 0 \qquad \forall \ V_a \in \mathcal{V}(\gamma)$$
(3.2.36)

$$\sum_{L_{ab\nu} \in C} r_{ab\nu} q_{ab\nu}^{\gamma} = 0 \qquad \forall \text{ Schleifen } C \text{ von } \gamma$$
(3.2.37)

 $(r_{ab\nu}$ ist unabhängig von
 $\gamma).$ Die inneren Impulse $k^{\gamma}_{ab\nu}$ sollen jedoch durch die Identität

$$q_{ab\nu}(p) + k_{ab\nu}(k) = q^{\gamma}_{ab\nu}(p^{\gamma}(p,k)) + k^{\gamma}_{ab\nu}(k)$$
(3.2.38)

festgelegt werden. Hierbei ist $p^{\gamma}(p,k)$ fixiert durch die Impulserhaltung an den Vertizes von γ :

$$p_a^{\gamma}(p,k) = -\sum_{b,\sigma \notin \gamma} l_{ab\sigma}(p,k) + q_a \qquad \forall \ V_a \in \mathcal{V}(\gamma) \tag{3.2.39}$$

Die Identität (3.2.38) garantiert, daß $k_{ab\nu}^{\gamma}$ allein eine Funktion der inneren Impulse k ist. Das – so hatten wir oben an den Beispielen gesehen – ist eine ganz wichtige Eigenschaft, so wichtig, daß wir sie durch eine Definition auszeichnen: alle Impulsflüsse, die so gewählt sind, daß die inneren Impulse eines Unterdiagramms allein Funktionen der inneren Impulse des Diagramms sind, heißen *zulässige* Impulsflüsse. Für jede Menge U von nicht-überlappenden 1PI-Unterdiagrammen $\gamma \subset \Gamma$ können wir damit zu

$$I_{\Gamma} = \prod_{\nu_a \in \mathcal{V}(\Gamma)} P_a(l_{ab\sigma}) \prod_{L_{ab\nu} \in \mathcal{L}(\Gamma)} \Delta_{ab\nu}(l_{ab\nu})$$
(3.2.40)

– dem Integranden des Diagramms Γ – auch $I_{\Gamma}(U)$ definieren:

$$I_{\Gamma}(U) = \prod_{\nu \in \mathcal{V}(\Gamma)} P_a\left(l_{ab\nu}^{\gamma(V_a)}\right) \prod_{L_{ab\nu} \in \mathcal{L}(\Gamma)} \Delta_{ab\nu}\left(l_{ab\nu}^{\gamma(L_{ab\nu})}\right)$$
(3.2.41)

wobei

$$\gamma(V_a) = \text{ kleinstes Element von } U \cup \{\Gamma\}, \text{ das } V_a \text{ enthält}$$

$$\gamma(L_{ab\nu}) = \text{ " U } \cup \{\Gamma\}, \text{ L}_{ab\nu} \text{ "}$$

Hiermit sind alle Elemente, die zu (3.2.29) beitragen, definiert.²

Es bleibt noch nachzutragen, daß (3.2.29) in der Tat zu einem absolut konvergenten Integral führt. (Ist das Diagramm γ selbst divergent, so tritt als letzter Faktor im Produkt der Subtraktionsoperatoren $(1 - t_{p\gamma}^{d(\gamma)})$ auf.) Den Beweis werden wir nicht führen, sondern wir zitieren die entsprechende Literatur: Zimmermann 69.

 $^{^2\}rm{Ein}$ Beispiel für Impulsfluß und Umschreibung des Integranden in die entsprechenden Variablen werden wir im nächsten Abschnitt diskutieren.

3.2.3 Überlappende Divergenzen. Waldformel

Im Gegensatz zu den bisher behandelten Fällen erwarten wir eine völlig neue Lage für ein Diagramm γ mit Unterdiagrammen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$



(Zwei-Schleifen-Beitrag zum Beispiel (1).) Oder auch für



Hier gilt keine der Relationen (3.2.26) -(3.2.28) (Zwei-Schleifen-Beitrag zum Beispiel (3).) Man sagt "die Unterdiagramme λ_i überlappen". In diesen Fällen kann man zwar wieder alle Unterdiagramme gemäß (3.2.21) konvergent machen, aber es ist keineswegs klar, wie die konvergent gemachten Unterdiagramme mit dem ebenfalls noch zu subtrahierenden Diagramm kombiniert werden können, so daß Konvergenz entsteht. (Die Subtraktionsterme für ein Unterdiagramm könnten zu unvorhergesehener Divergenz in einem anderen führen.) Die Lösung dieses Problems erfordert eine geeignete Anordnung der Subtraktionen. Wir wollen sie nun skizzieren. Hierzu betrachten wir noch einmal das 1PI Diagramm γ

dessen 1PI Unterdiagramme λ_1 und λ_2 nicht überlappen. Die Dyson-Formel (3.2.29) schreibt für dieses Beispiel

$$R_{\gamma}(p,k) = (1 - t_{p^{\gamma}}^{d(\gamma)})S_{\gamma}(1 - t_{p^{\lambda_1}}^{d(\lambda_1)})S_{\lambda_1}(1 - t_{p^{\lambda_2}}^{d(\lambda_2)})S_{\lambda_2}I_{\gamma}(U)$$
(3.2.42)

$$U = \{\gamma, \lambda_1, \lambda_2\} = \{\gamma\} \cup \{\lambda_1, \lambda_2\}$$
(3.2.43)

als subtrahierten Integranden vor. Hierbei ist die Reihenfolge von $(1 - t_{p^{\lambda_1}}^{d(\lambda_1)})S_{\lambda_1}$ und $(1 - t_{p^{\lambda_2}}^{d(\lambda_2)})S_{\lambda_2}$ gleichgültig, denn $\lambda_1 \cap \lambda_2 = \emptyset$ d.h. sowohl Umbenennungen gemäß S_{λ_1} bzw. S_{λ_2} wie auch Subtraktionen $t_{p^{\lambda_1}}$ bzw. $t_{p^{\lambda_2}}$ haben keinen Einfluß aufeinander. Multiplizieren wir (3.2.42) aus, so erhalten wir

$$R_{\gamma}(p,k) = S_{\gamma}S_{\lambda_{1}}S_{\lambda_{2}}I_{\gamma}(U) + (-t_{p\gamma}^{d(\gamma)}S_{\gamma})S_{\lambda_{1}}S_{\lambda_{2}}I_{\gamma}(U) + S_{\gamma}(-t_{p\lambda_{1}}^{d(\lambda_{1})}S_{\lambda_{1}})S_{\lambda_{2}}I_{\gamma}(U) + (-t_{p\gamma}^{d(\gamma)}S_{\gamma})(-t_{p\lambda_{1}}^{d(\lambda_{1})}S_{\lambda_{1}})S_{\lambda_{2}}I_{\gamma}(U) + S_{\gamma}S_{\lambda_{1}}(-t_{p\lambda_{2}}^{d(\lambda_{2})}S_{\lambda_{2}})I_{\gamma}(U) + (-t_{p\gamma}^{d(\gamma)}S_{\gamma})S_{\lambda_{1}}(-t_{p\lambda_{2}}^{d(\lambda_{2})}S_{\lambda_{2}})I_{\gamma}(U) + S_{\gamma}(-t_{p\lambda_{1}}^{d(\lambda_{1})}S_{\lambda_{1}})(-t_{p\lambda_{2}}^{d(\lambda_{2})}S_{\lambda_{2}})I_{\gamma}(U) + (-t_{p\gamma}^{d(\gamma)}S_{\gamma})(-t_{p\lambda_{1}}^{d(\lambda_{1})}S_{\lambda_{1}})(-t_{p\lambda_{2}}^{d(\lambda_{2})}S_{\lambda_{2}})I_{\gamma}(U)$$
(3.2.44)

Aus der Vorschrift (3.2.41) ergeben sich trivialerweise die Relationen

$$I_{\gamma}(\{\lambda_i\}) = I_{\gamma}(\{\gamma, \lambda_i\}) \qquad i = 1, 2$$
 (3.2.45)

$$I_{\gamma}(U) = I_{\gamma}(\{\lambda_1, \lambda_2\}) \tag{3.2.46}$$

Ebenso ist leicht einzusehen, daß

und

$$S_{\gamma}S_{\lambda_1}S_{\lambda_2}I_{\gamma}(U) = S_{\gamma}I_{\gamma}(U) \tag{3.2.47}$$

gilt. $S_{\gamma}I_{\gamma}(U)$ ist aber nichts anderes als der Integrand $I_{\gamma}(p,k) \equiv I_{\gamma}(p^{\gamma},k^{\gamma})$. Damit folgt

$$\begin{aligned} R_{\gamma}(p,k) = & I_{\gamma}(p,k) + (-t_{p\gamma}^{d(\gamma)}S_{\gamma})I_{\gamma}(\{\gamma\}) \\ &+ S_{\gamma}(-t_{p\lambda_{1}}^{d(\lambda_{1})}S_{\lambda_{1}})I_{\gamma}(\{\lambda_{1}\}) + (-t_{p\gamma}^{d(\gamma)}S_{\gamma})(-t_{p\lambda_{1}}^{d(\lambda_{1})}S_{\lambda_{1}})I_{\gamma}(\{\gamma,\lambda_{1}\}) \\ &+ S_{\gamma}(-t_{p\lambda_{2}}^{d(\lambda_{2})}S_{\lambda_{2}})I_{\gamma}(\{\lambda_{2}\}) + (-t_{p\gamma}^{d(\gamma)}S_{\gamma})(-t_{p\lambda_{2}}^{d(\lambda_{2})}S_{\lambda_{2}})I_{\gamma}(\{\gamma,\lambda_{2}\}) \\ &+ S_{\gamma}(-t_{p\lambda_{1}}^{d(\lambda_{1})}S_{\lambda_{1}})(-t_{p\lambda_{2}}^{d(\lambda_{2})}S_{\lambda_{2}})I_{\gamma}(\{\lambda_{1},\lambda_{2}\}) \\ &+ (-t_{p\gamma}^{d(\gamma)}S_{\gamma})(-t_{p\lambda_{1}}^{d(\lambda_{1})}S_{\lambda_{1}})(-t_{p\lambda_{2}}^{d(\lambda_{2})}S_{\lambda_{2}})I_{\gamma}(\{\gamma,\lambda_{1},\lambda_{2}\}) \end{aligned}$$
(3.2.48)

Wir finden also eine Summe über alle Mengen von 1PI Diagrammen, die nicht überlappen:

$$\mathcal{F}_{\gamma} = \left\{ \begin{array}{cc} \emptyset, & \{\gamma\}; \\ \{\lambda_1\}, & \{\gamma, \lambda_1\}; \\ \{\lambda_2\}, & \{\gamma, \gamma_2\}, \\ \{\lambda_1, \lambda_2\}, \{\gamma, \lambda_1, \lambda_2\} \right\} & \text{mit passender Impulswahl.} \end{array}$$
(3.2.49)

D.h. wir können $R_{\gamma}(p,k)$ als

$$R_{\gamma}(p,k) = S_{\gamma} \sum_{U \in F_{\gamma}} \prod_{\lambda \in U} (-t_{p^{\lambda}}^{d(\lambda)} S_{\lambda}) I_{\gamma}(U)$$
(3.2.50)

schreiben. Hierbei ist die Konvention getroffen, daß die leere Menge \emptyset ebenfalls zu F_γ gehört und daß

$$I_{\gamma}(\emptyset) = I_{\gamma}(\{\gamma\}) \equiv I_{\gamma}(p,k) \tag{3.2.51}$$

zu wählen ist.

Jede Menge von 1PI Unterdiagrammen $\gamma \subseteq \Gamma$, die nicht überlappen, nennen wir einen *Wald*, die Formel (3.2.50) heißt darum die *Waldformel*.

Ihre große Bedeutung beruht darin, daß sie verallgemeinerbar ist auf den überlappenden Fall. Es sei also Γ ein 1PI Diagramm und \mathcal{F}_{Γ} die Familie aller Wälder, die sich aus den 1PI Unterdiagrammen $\gamma \subseteq \Gamma$ bilden lassen. Dann definieren wir als den subtrahierten Integranden

$$R_{\Gamma}(p,k) = \sum_{U \in \mathcal{F}_{\Gamma}} S_{\Gamma} \prod_{\gamma \in U} (-t_{p^{\gamma}}^{d(\gamma)} S_{\gamma}) I_{\Gamma}(U)$$
(3.2.52)

Mit der ε -Vorschrift (3.2.18) gilt dann der

Satz (Zimmermann 69): Das Integral $\int dk_1 \dots dk_m R_{\Gamma}(p,k)$ ist abolut konvergent. Im Limes $\varepsilon \to 0$ streben diese Integrale gegen eine lorentzkovariante temperierte Distribution.

Der Beweis des Satzes ist nicht einfach und soll darum hier nicht wiedergegeben werden.

Wir wollen lediglich noch für das Beispiel



explizit Impulsfluß und Waldformel diskutieren.

Wir bezeichnen zuerst die Linien, legen die Schleifen fest und geben die äußeren Impulse für γ an:



Damit sind die inneren Impulse für γ bestimmt (vergl. (3.2.32)):

$$k_{121} = k_1$$
 $k_{122} = -k_1 + k_2$ $k_{123} = -k_2$ (3.2.53)

Nun wählen wir $r_{121} = 0$. Dann sagt die Impulserhaltung

an
$$V_1$$
 : $p_1 = q_{121} + q_{122} + q_{123}$,
an V_2 : $p_2 = q_{211} + q_{212} + q_{213}$, (3.2.54)

(D.h. $p_1 + p_2 = 0$ in Übereinstimmung mit der Impulserhaltung für das Diagramm.), während (3.2.34)

$$\begin{array}{lll}
\text{für } C_1 & \text{zu :} & q_{121} \cdot 0 + q_{212} = 0 \\
\text{für } C_2 & \text{zu :} & q_{122} + q_{213} = 0
\end{array}$$
(3.2.55)

führt. Damit ergibt sich

$$l_{121} = k_1 + p$$

$$l_{122} = -k_1 + k_2 \qquad (3.2.56)$$

$$l_{123} = -k_2 \qquad (\text{mit } p_1 = -p_2 \equiv p)$$

Die 1PI Unterdiagramme von γ sind



Für γ_1 finden wir

$$k_{121}^{\gamma_1} = k^{\gamma_1} \qquad \qquad k_{122}^{\gamma_1} = -k^{\gamma_1} \qquad (3.2.57)$$

bei
$$V_1: \qquad p_1^{\gamma_1} + q_{121}^{\gamma_1} + q_{122}^{\gamma_1}$$
 (3.2.58)

für
$$C^{\gamma_1}$$
: $q_{121}^{\gamma_1} \cdot 0 + q_{212}^{\gamma_1} = 0$ (3.2.59)

 $(r_{121}=0$ gilt auch für die Unterdiagramme !). Da
mit lauten also die Impulse für γ_1 betrachtet als Diagramm

$$l_{121}^{\gamma_1} = k^{\gamma_1} + p_1^{\gamma_1} l_{122}^{\gamma_1} = -k^{\gamma_1}.$$
(3.2.60)

Betten wir γ_1 als Unterdiagramm in γ ein, so heißt (3.2.39)

$$p_1^{\gamma_1} = p_1 + l_{213} = p - (-k_2) = p + k_2 \tag{3.2.61}$$

während (3.2.38) für die Linie L_{121}

$$k_1 + p = k_{121}^{\gamma_1}(k_1, k_2) + q_{121}^{\gamma_1}(k_1, k_2, p)$$
(3.2.62)

aussagt. Hieraus folgt

$$q_{121}^{\gamma_1} = p_1^{\gamma_1} = p + k_2 \tag{3.2.63}$$

und damit

$$k_{121}^{\gamma_1} = k^{\gamma_1} = k_1 + p - (p + k_2) = k_1 - k_2$$

$$k_{122}^{\gamma_1} = -k^{\gamma_1} = -(k_1 - k_2).$$
(3.2.64)

Die entsprechenden Gleichungen für γ_2 lauten:

$$k_{121}^{\gamma_2} = k^{\gamma_2} \qquad \qquad k_{123}^{\gamma_2} = -k^{\gamma_2} \qquad (3.2.65)$$

bei
$$V_1: \qquad p_1^{\gamma_2} + q_{211}^{\gamma_2} + q_{213}^{\gamma_2} = 0$$
 (3.2.66)

für
$$C^{\gamma_2}$$
: $q_{121}^{\gamma_2} \cdot 0 + q_{213}^{\gamma_2} = 0$ (3.2.67)

d.h.
$$q_{121}^{\gamma_2} = p_1^{\gamma_2}$$
 (3.2.68)

Einbettung in γ :

$$p_2^{\gamma_1} = p + l_{212} = p - (-k_1 + k_2) = p + k_1 - k_2 \tag{3.2.69}$$

$$q_{121}^{\gamma_2}(k_1, k_2, p) = p + k_1 - k_2 \tag{3.2.70}$$

$$k_{121}^{\gamma_2} = k^{\gamma_2} = k_1 + p - q_{121}^{\gamma_2} = k_1 + p - p - k_1 + k_2 = k_2$$
(3.2.71)

Für γ_3 erhalten wir analog:

$$k_{122}^{\gamma_3} = k^{\gamma_3} \qquad \qquad k_{123}^{\gamma_3} = -k^{\gamma_3} \qquad (3.2.72)$$

bei
$$V_1: \qquad p_1^{\gamma_3} + q_{212}^{\gamma_3} + q_{213}^{\gamma_3} = 0$$
 (3.2.73)

für
$$C^{\gamma_3}$$
: $q_{122}^{\gamma_3} + q_{213}^{\gamma_3} = 0$ (3.2.74)

d.h.
$$q_{122}^{\gamma_3} = q_{123}^{\gamma_3} = \frac{1}{2} p_1^{\gamma_3}$$
 (3.2.75)

Einbettung in γ :

$$\frac{1}{2}p_1^{\gamma_3} = \frac{1}{2}(p_1 + l_{211}) = \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}k_1 - \frac{1}{2}p = -\frac{1}{2}k_1 \qquad (3.2.76)$$

$$k_{122}^{\gamma_3} = k^{\gamma_3} = -k_1 + k_2 + \frac{1}{2}k_1 = -\frac{1}{2}k_1 + k_2$$
(3.2.77)

$$k_{123}^{\gamma_3} = -k^{\gamma_3} = \frac{1}{2}k_1 - k_2 \tag{3.2.78}$$

Um die explizite Form der Waldformel zu finden, benötigen wir zuerst die Wälder. Die Antwort ist einfach:

$$\mathcal{F}_{\gamma} = \{ \emptyset, \{\gamma\}, \{\gamma_i\}, \{\gamma, \gamma_i\} \} \quad i = 1, 2, 3$$
(3.2.79)

Dann müssen wir die Funktionen $I_{\gamma}(U)$ angeben, die tatsächlich voneinander verschieden sind. Die Definition (3.2.41) lautet für den gegenwärtigen Fall

$$I_{\gamma}(U) = \prod_{L_{ab\sigma} \in \mathcal{L}_{\gamma}} \Delta_{ab\sigma}(\tilde{k}_{ab\sigma} + \tilde{q}_{ab\sigma}), \qquad (3.2.80)$$

mit $\tilde{k}_{ab\sigma}, \tilde{q}_{ab\sigma}$ den Impulsvariablen, die $L_{ab\sigma}$ im kleinsten Element von $\{\gamma\} \cup U$ hat. Unterdrücken wir Wick-Faktoren, i's und ϵ 's, so ergeben sich die folgenden Funktionen:

$$I_{\gamma}(\emptyset) = I_{\gamma}(\{\gamma\})$$

$$= \frac{1}{(l_{121}^2 - m^2)(l_{122}^2 - m^2)(l_{123}^2 - m^2)}$$

$$= \frac{1}{((p+k_1)^2 - m^2)((-k_1 + k_2)^2 - m^2)(k_2^2 - m^2)}$$

$$I_{\gamma}(\{\gamma_1\}) = I_{\gamma}(\{\gamma, \gamma_1\})$$
(3.2.81)

$$= \frac{1}{(l_{123}^2 - m^2)} \cdot \frac{1}{((l_{121}^{\gamma_1})^2 - m^2)((l_{122}^{\gamma_1})^2 - m^2)}$$
(3.2.82)

analog für γ_2, γ_3

Für die Waldformel

$$R_{\gamma} = S_{\gamma} \sum_{U \in \mathcal{F}_{\gamma}} \prod_{\lambda \in U} (-t_{p^{\lambda}}^{d(\lambda)} S_{\lambda}) I_{\gamma}(U)$$
(3.2.83)

fehlen uns nur noch die Subtraktionsgrade:

$$d(\gamma) = 2$$
 $d(\gamma_i) = 0$ $i = 1, 2, 3$ (3.2.84)

Sie lautet damit ausgeschrieben:

$$R_{\gamma} = I_{\gamma}(\emptyset) - t_{p}^{2}I_{\gamma}(\{\gamma\}) + \sum_{i=1}^{3} S_{\gamma}(-t_{p^{\gamma_{i}}}^{o}I_{\gamma}(\{\gamma_{i}\}) + \sum_{i=1}^{3} (-t_{p}^{2}S_{\gamma})(-t_{p^{\gamma_{i}}}^{o})I_{\gamma}(\{\gamma,\gamma_{i}\})$$

$$= (1 - t^{2})I_{-}(\emptyset) + (1 - t^{2})\sum S_{-}(-t_{p^{\gamma_{i}}}^{o})I_{-}(\{\gamma_{i}\})$$

$$(3.2.85)$$

$$= (1 - t_p)I_{\gamma}(\emptyset) + (1 - t_p)\Sigma_i S_{\gamma}(-t_p^{\gamma_i})I_{\gamma}(\{\gamma_i\})$$

$$= (1 - t_p^2)(I_{\gamma}(\emptyset) + \Sigma_i I_{\gamma/\gamma_i} S_{\gamma}(-t_p^{o_j})I_{\gamma_i}(\{\gamma_i\}))$$
(3.2.86)

$$= (1 - t_p^2) \left\{ \frac{1}{((k_1 + p)^2 - m^2)((-k_1 + k_2)^2 - m^2)(k_2^2 - m^2)} \\ + \frac{1}{k_2^2 - m^2} S_{\gamma}(-t_{p^{\gamma_1}}^o) \frac{1}{((k^{\gamma_1} + p^{\gamma_1})^2 - m^2)((-k^{\gamma_1})^2 - m^2)} \\ + \frac{1}{(-k_1 + k_2)^2 - m^2} S_{\gamma}(-t_{p^{\gamma_2}}^o) \frac{1}{((k^{\gamma_2} + p^{\gamma_2})^2 - m^2)((-k^{\gamma_2})^2 - m^2)} \\ + \frac{1}{(k_1 + p)^2 - m^2} S_{\gamma}(-t_{p^{\gamma_3}}^o) \frac{1}{((k^{\gamma_3} + \frac{1}{2}p^{\gamma_3})^2 - m^2)((-k^{\gamma_3} + \frac{1}{2}p^{\gamma_3})^2 - m^2)} \right\}$$
(3.2.87)

$$= (1 - t_p^2) \left\{ \frac{1}{((k_1 + p)^2 - m^2)((-k_1 + k_2)^2 - m^2)(k_2^2 - m^2)} + \frac{1}{k_2^2 - m^2} (-1) \frac{1}{((-k_1 + k_2)^2 - m^2)((k_1 - k_2)^2 - m^2)} + \frac{1}{(-k_1 + k_2)^2 - m^2} (-1) \frac{1}{((-\frac{1}{2}k_1 + k_2)^2 - m^2)((k_1 - k_2)^2 - m^2)} + \frac{1}{(k_1 + p)^2 - m^2} (-1) \frac{1}{((-\frac{1}{2}k_1 + k_2)^2 - m^2)((\frac{1}{2}k_1 - k_2)^2 - m^2)} \right\}$$

$$= (1 - t_p^2) \left\{ \frac{1}{((k_1 + p)^2 - m^2)((-k_1 + k_2)^2 - m^2)(k_2^2 - m^2)} - \frac{1}{((k_1 + p)^2 - m^2)((\frac{1}{2}k_1 - k_2)^2 - m^2)^2} \right\}$$
(3.2.88)

Im Gleichung (3.2.86) haben wir eine neue Bezeichnung eingeführt, die auch einem neuen Begriff entspricht: I_{γ/γ_1} , steht für die Line $\frac{1}{k_2^2 - m^2}$, die übrig bleibt, wenn das Unterdiagramm γ_1 zu einem Punkt zusammengezogen wird. γ/γ_1 heißt daher reduziertes Diagramm. Die Verallgemeinerung ist klar: sind $\gamma_1, \ldots, \gamma_c$ nicht überlappende 1PI Unterdiagramme von γ , so besteht das reduzierte Diagramm $\bar{\gamma} = \gamma/\gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_c$ per definitionem aus den Linien $\mathcal{L}(\bar{\gamma}) = \mathcal{L}(\gamma) \setminus (\mathcal{L}(\gamma_1) \cup \ldots \cup \mathcal{L}(\gamma_c))$. Diesen Linien sind Faktoren und Impulse zugeordnet wie sie im Diagramm γ auftreten. Faktoren, die von äußeren Vertizes von $\gamma_1 \cup \ldots \gamma_c$ herrühren, treten ebenfalls auf.

3.2.4 Normalprodukte

Die Waldformel (3.2.52) und das zugehörige Konvergenztheorem erlauben zwei Verallgemeinerungen, die außerordentlich fruchtbar sind. Die erste basiert auf der schlichten Beobachtung, daß die einzelnen Diagramme natürlich auch konvergent bleiben, wenn die Vertizes nicht aus einer Wechselwirkungslagrangefunktion herrühren. Von Belang war ja wirklich nur der Divergenzgrad

$$d(\gamma) = 4 - \sum_{a} N_a d_a + \sum_{i \in \mathcal{V}(\gamma)} (d_i - 4), \qquad (3.2.89)$$

völlig irrelevant war aber die Herkunft der Vertizes. D.h. die Waldformel gibt ein bequemes Mittel zur Hand, Greensche Funktionen von zusammengesetzten Operatoren zu konstruieren. Beiträge zu $\langle T(\prod_{i=1}^{n} Q_i(x_i)\varphi(y_1)\ldots\varphi(y_k))\rangle$ definieren wir gemäß

$$\langle T\left(\prod_{i=1}^{n} Q_{i}(x_{i})(\varphi(y_{1})\dots\varphi(y_{k})\right)\rangle = \langle T\left(\prod_{i=1}^{n} Q_{i}^{(o)}(x_{i})\varphi^{(o)}(y_{1})\dots\varphi^{(o)}(y_{k})e^{i\int \mathcal{L}_{int}^{(o)}}\right)\rangle_{(o)}$$
(3.2.90)

und interpretieren die rechte Seite im Sinne der mit der Waldformel erweiterten Gell-Mann-Low-Formel (2.2.33). Die auftretenden Felder sind freie Felder, das Vakuum ist das freie Vakuum: daher der Index (o). Die Greenschen Funktionen werden mit Hilfe des Wickschen Theorems (2.2.13) als Summe von Diagrammen ausgedrückt. Die Divergenzen werden dann über die durch die Waldformel angegebenen Subtraktionen beseitigt. Dabei sind die Vertizes, die von $\mathcal{L}_{int}^{(o)}$ herrühren, als Vertizes der Dimension $d_i = 4$ aufzufassen, während die Vertizes $Q_i^{(o)}(x_1)$ gemäß ihrer Dimension zu subtraktieren sind:

$$\dim Q_i(x_i) \equiv \dim Q_i^{(o)}(x_i) = d_i.$$
(3.2.91)

Diese Werte treten für die jeweiligen im Diagramm vorkommenden Vertizes Q in (3.2.89) auf. Die Reduktionstechnik aus Abschnitt 2.4 erlaubt schließlich, aus den Greenschen Funktionen auf *Operatoren* $\prod_{i=1}^{n} Q_i^{Op}(x_i)$ zurückzuschließen. Man hat damit nicht nur Greensche Funktionen, sondern (im störungstheoretischen Sinne) zusammengesetzte Operatoren und deren Produkte definiert!

Um diesen neuen Begriff auch durch die Bezeichnung herauszuheben, schreiben wir

$$\langle T \Big(\prod_{i=1}^{n} Q_i(x_i)(\varphi(y_1) \dots \varphi(y_k)) \Big) \rangle$$

$$= \langle T \Big(\prod_i N_{d_i}[Q_i(x_i)]\varphi^{(o)}(y_1) \dots \varphi^{(o)}(y_k)e^{i\int \mathcal{L}_{int}^{(o)}} \Big) \rangle_{(o)}$$

$$(3.2.92)$$

und nennen die so definierten Größen Normalprodukte (oder auch Einsetzungen) (Zimmermann 73). Vereinfacht werden wir auch oft $[Q(x)]_d$ schreiben.

Die zweite Verallgemeinerung läßt sich in Tiefe nur nachvollziehen, wenn man den Konvergenzbeweis im Detail verfolgt – was wir nicht getan haben. Es zeigt sich nämlich, daß die Konvergenz auch dann noch gewährleistet ist, wenn Normalprodukte statt mit $d_i = dimQ_i(x_i)$ mit

$$\delta_i = d_i + c_i \qquad c_i \in \mathbf{N}_o \tag{3.2.93}$$

subtrahiert werden. (Im ersteren Fall spricht man von "minimaler" Subtraktion, im letzteren von "Übersubtraktion".) Konvergenz ist – genauer formuliert – schon dann gewährleistet, wenn aus der Vorgabe³

$$\delta(\gamma) = 4 - \sum_{a} N_a d_a + \sum_{i \in \mathcal{V}(\gamma)} (\delta_i - 4)$$
(3.2.94)

mit $\delta(\gamma) \ge d(\gamma)$ folgt, daß für alle reduzierten Diagramme (s. letzten Abschnitt) $\bar{\gamma} = \gamma/\gamma_1 \dots \gamma_c$

$$\delta(\gamma) \ge d(\bar{\gamma}) + \sum_{i=1}^{c} \delta(\gamma_i) \tag{3.2.95}$$

gilt. Hierbei ist

$$d(\bar{\gamma}) = d(\gamma) - \sum_{i=1}^{c} d(\gamma_i).$$
 (3.2.96)

Normalprodukte sind also jetzt folgendermaßen definiert

$$\langle T \Big(\prod_{i} N_{\delta_{i}}[Q_{i}(x_{i})]\varphi(y_{1})\dots\varphi(y_{k}) \Big) \rangle$$

$$= \langle T \Big(\prod_{i} N_{\delta_{i}}[Q_{i}^{(o)}(x_{i})]\varphi^{(o)}(y_{1})\dots\varphi^{(o)}(y_{k})e^{i\int \mathcal{L}_{int}^{(o)}} \Big) \rangle_{(o)}$$

$$= \sum_{\Gamma} R_{\Gamma}$$

$$(3.2.97)$$

$$R_{\Gamma} = S_{\Gamma} \sum_{U \in \mathcal{F}_{\Gamma}} \prod_{\gamma \in U} \left(-t_{p\gamma}^{\delta(\gamma)} S_{\gamma} \right) I_{\Gamma}(U)$$
(3.2.98)

Die Normalprodukte gehorchen Rechenregeln, die es gestatten, einen Algorithmus aufzubauen, so daß man mit ihnen arbeiten kann, ohne bei Schritt und Tritt auf die fundamentale Definition zurückgreifen zu müssen. Diese Rechenregeln wollen wir jetzt für den Fall *eines* Normalproduktes angeben.

³Man vergeiche mit (3.2.13).

1. Linearität

Für $Q = \alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2$

$$\Rightarrow \langle T[Q]X \rangle = \alpha_1 \langle T[Q_1]X \rangle + \alpha_2 \langle T[Q_2]X \rangle \tag{3.2.99}$$

(X steht für eine beliebige Folge elementarer Felder.)

Der Beweis ist sehr einfach. In der diagrammatischen Entwicklung wird der Vertex Q durch die Summe $\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2$ ersetzt. Das ändert nichts an der Struktur der Diagramme, nichts an der Subtraktionsvorschrift, also nichts an der Waldformel. Und für jedes Diagramm gilt die Linearität ja trivialerweise. (Vergl. Wicksches Theorem, Abschnitt 2.2.1.)

2. Normierungseigenschaften

Betrachten wir die Einsetzung $[Q]_{\delta} \cdot \Gamma$ (das Normalprodukt $N_{\delta}[Q]$ in 1PI Greenschen Funktionen), dann lautet (3.2.94)

$$\delta(\gamma) = \delta - \sum_{a} N_a d_a \tag{3.2.100}$$

(denn alle anderen Vertizes als Q sollen solche aus der Wechselwirkung mit $\delta_i = 4$ sein). D.h. alle nicht-trivialen Diagramme mit $\delta(\gamma) \ge 0$ sind in p = 0 subtrahiert. Wenn also $\mathcal{D}^{(M)}$ ein Differentialoperator der Ordnung M in den äußeren Impulsen ist, so gilt

$$\mathcal{D}^{(M)}\Gamma_Q(-\sum p_i; p_1, \dots p_N)\Big|_{p=0} = \text{ trivialer Beitrag}$$
(3.2.101)

für $0 \le M \le \delta - \sum_a N_a d_a$.

3. Ableitungsregel

$$\partial_{\mu} N_{\delta}[Q(x)] \cdot \Gamma = N_{\delta+1}[\partial_{\mu}Q(x)] \cdot \Gamma \qquad (3.2.102)$$

oder auch

$$\partial_{\mu} \langle TN_{\delta}[Q(x)]X \rangle_{c} = \langle TN_{\delta+1}[\partial_{\mu}Q(x)]X \rangle_{c}$$
(3.2.103)

Um sich von der Richtigkeit von (3.2.102) zu überzeugen, ist nach Entwicklung in Diagramme im wesentlichen zu verwenden, daß

$$p_{\mu}t_{p}^{\delta} = t_{p}^{\delta+1}p_{\mu} \tag{3.2.104}$$

gilt; denn an der diagrammatischen Struktur und damit an der Form der Wälder hat sich ja nichts geändert.

86

Die Form (3.2.103) dieser Regel rechtfertigt einen Kommentar. Die besonderen Subtraktionsvorschriften, die durch die Waldformel ausgedrückt werden, definieren Ordnung für Ordnung in der Störungstheorie ein wohl-bestimmtes T-Produkt. (Man vergleiche die Diskussion am Ende des Abschnitts 3.2.1.) Dieses T-Produkt ist nicht das naive und daher sollte man auch nicht die naiven Regeln erwarten (gemäß derer man Ableitungen der θ -Funktionen zu erwarten hätte).

4. Zimmermann-Identität

Welcher Zusammenhang besteht zwischen Normalprodukten, die sich nur dadurch unterscheiden, daß dasselbe klassische Produkt von Feldern unterschiedlich subtrahiert wird? Die Antwort ist überraschend einfach:

$$N_{\delta}[Q] \cdot \Gamma = N_{\varphi}[Q] \cdot \Gamma + \sum_{i} u_{i}^{(Q)} N_{\varphi}[Q_{i}] \cdot \Gamma$$
(3.2.105)

für $\varphi > \delta \ge dim(Q)$. Hierbei bilden die Monome Q_i eine Basis der klassischen Monome mit $dim(Q_i) = \varphi$, die dieselben Quantenzahlen haben wie Q (sofern die zugehörigen Symmetrien vom Schema respektiert werden; hierzu gehören insbesondere die Lorentzinvarianz und i.a. die diskreten Symmetrien).

Bemerkenswert an (3.2.105) ist die Tatsache, daß die Differenz zweier Normalprodukte mit unterschiedlichen Subtraktionsgrad wieder ein Normalprodukt ist. Da der Beweis von (3.2.105) in allen Ordnungen der Störungstheorie nicht gerade einfach ist, wollen wir uns mit einer expliziten Rechnung für ein konkretes Beispiel begnügen. Zuvor merken wir noch an, daß die Koeffizienten $u_i^{(a)}$ am einfachsten mit Hilfe der Normierungseigenschaften (3.2.101) berechnet werden können. Wir betrachten

$$m^2 N_2[\varphi^2] \cdot \Gamma = m^2 N_4[\varphi^2] \cdot \Gamma + N_4[u_1 \partial \varphi \partial \varphi + u_2 \varphi \Box \varphi + v \varphi^4] \cdot \Gamma \qquad (3.2.106)$$

oder, noch einfacher, die integrierte Version von (3.2.106)

$$m^{2}N_{2}\left[\int\varphi^{2}\right]\cdot\Gamma = m^{2}N_{4}\left[\int\varphi^{2}\right]\cdot\Gamma + N_{4}\left[\int(u\partial\varphi\partial\varphi + v\varphi^{4})\right]\cdot\Gamma \qquad (3.2.107)$$
$$u = u_{1} - u_{2} \qquad (3.2.108)$$

Wir gehen Schleifenordnung für Schleifenordnung vor.

 $(\hbar)^o$ Es sind keinerlei Subtraktionen auszuführen, denn

$$m^{2} \left(N_{2} \left[\int \varphi^{2} \right] \cdot \Gamma \right)^{(o)} = m^{2} \int \varphi^{2}$$

$$m^{2} \left(N_{4} \left[\int \varphi^{2} \right] \cdot \Gamma \right)^{(o)} = m^{2} \int \varphi^{2}$$
(3.2.109)

Diese offensichtliche Trivialität erlaubt den durchaus wichtigen Schluß, daß u und v mindestens von der Ordnung \hbar sind:

$$u = o(\hbar)$$
 , $v = o(\hbar)$ (3.2.110)

 $(\hbar)^1$

$$m^{2}(N_{2}[\int \varphi^{2}] \cdot \Gamma)^{(1)} = m^{2}(N_{4}[\int \varphi^{2}] \cdot \Gamma)^{(1)} + u^{(1)} \int \partial \varphi \partial \varphi + v^{(1)} \int \varphi^{4} \quad (3.2.111)$$

Hier haben wir verwendet, daß u und v von der Ordnung \hbar sind, d.h. die entsprechenden Einsetzungen nur den Beitrag des trivialen Diagramms liefern können. Für Vertexfunktionen mit $N \geq 6$ äußeren Beinen wird weder die N_2 - noch die N_4 -Einsetzung subtrahiert:

$$\delta(\gamma) = 4 - N < 0 \quad \text{für } N \ge 6 \qquad \qquad N_4 - \text{Einsetzung} \qquad (3.2.112)$$

D.h.

$$\left(\left[\int \varphi^2\right]_2 \cdot \Gamma\right)_{\underbrace{\varphi \dots \varphi}_N}^{(1)} = \left(\left[\int \varphi^2\right]_4 \cdot \Gamma\right)_{\underbrace{\varphi \dots \varphi}_N}^{(1)}$$
(3.2.113)

– was in der Tat mit (3.2.111) übereinstimmt, denn die lokalen Vertizes $\int \partial \varphi \partial \varphi$, $\int \varphi^4$ tragen nur für N = 2 bzw. N = 4 äußere Beine bei. Für N = 4 liefert (3.2.111)

$$m^{2} \left(\left[\int \varphi^{2} \right]_{2} \cdot \Gamma \right)_{\varphi \varphi \varphi \varphi}^{(1)} = m^{2} \left(\left[\int \varphi^{2} \right]_{4} \cdot \Gamma \right)_{\varphi \varphi \varphi \varphi}^{(1)} + 4! v^{(1)} \int dz \delta(z - x_{1}) \delta(z - x_{2}) \delta(z - x_{3}) \delta(z - x_{4})$$

$$(3.2.114)$$

Diagrammatisch:

Die Behauptung ist also, daß der Unterschied zwischen dem Diagramm mit N_2 und N_4 -Einsetzung ein lokaler Term ist. Das ist aber sofort klar, wenn wir die betreffenden Integrale aufschreiben

$$a \int \frac{m^2}{((p-k)^2 - m^2)(k^2 - m^2)^2} \qquad N_2 - \text{Einsetzung}$$

$$\delta = -2, \text{ keine Subtr.}$$

$$a \int \left(\frac{m^2}{((p-k)^2 m^2)(k^2 - m^2)^2} - \frac{m^2}{(k^2 - m^2)^3}\right) \qquad N_4 - \text{Einsetzung}$$

$$\delta = 0, \text{ eine Subtr.}$$

$$(3.2.115)$$

Die Differenz ist genau der Subtraktionsterm, der hier natürlich endlich ist, weil schon $[\int \varphi^2]_2$ und nicht erst $[\int \varphi^2]_4$ endlich ist. Analog gehen wir für N = 2 vor und finden

$$m^{2} [\int \varphi^{2}]_{2} \qquad m^{2} [\int \varphi^{2}]_{4}$$

$$(3.2.116)$$

$$(3.2.116)$$

Wenn die Einsetzungen, wie hier angenommen, integriert sind, verschwinden ihre Beiträge wegen der Subtraktionen trivialerweise, denn die Integranden hängen nicht vom äußeren Impuls ab

(Im nicht-integrierten Fall (3.2.106) finden wir $u_1^{(1)} = u_2^{(1)}$ und der Impulsfaktor des Subtraktionsterms $\frac{1}{2}p^{\mu}p^{\nu}\partial_{p^{\mu}}\partial_{\partial^{\nu}}$ liefert die totale Ableitung $\Box_z \delta(z-x_1)\delta(z-x_2)$.)

In diesem einfachen Beispiel und diesen niederen Ordnungen können wir also die Zimmermann-Identitäten (3.2.106) bzw. (3.2.107) mit leichter Rechnung konstruieren.

In der Ordnung \hbar^2 wird die rekursive Struktur der Renormierung noch deutlicher. Betrachten wir (3.2.107) für N = 4 in dieser Ordnung, so erhalten wir als diagrammatische Gleichung

$$m^{2} [\int \varphi^{2}]_{2} \qquad m^{2} [\int \varphi^{2}]_{4}$$

$$\times \times \times + v^{(1)} \times + v^{(2)} \oplus \qquad (3.2.119)$$

$$+ u^{(1)} \times \times \times$$

Die Ein-Schleifen-Diagramme entstehen dadurch, daß Unterdiagramme, die die Differenz der Einsetzungen enthielten, zu einem Punkt kontrahiert werden. Sie haben die Form $I_{\gamma/\gamma_1} \times$ lokal. I_{γ/γ_1} ist das "sichtbare" Einschleifendiagramm; "lokal" ist der Faktor, der $t^{\delta=0} - t^{\delta=-2}$ entspricht (für $v^{(1)}$); für $u^{(1)} : t^{\delta=2} - t^{\delta=0}$.

Wir wollen die Diskussion dieses Beispiels hier abbrechen. Sie wird wieder aufgenommen in Abschnitt 4.1.

Abschließend ist ein Kommentar zur Wichtigkeit der Zimmermann-Identität (und ihren Verallgemeinerungen) angebracht. Es wird sich in Kapitel 4 zeigen, daß sich alle nicht-naiven Effekte der Quantenfeldtheorie auf Zimmermann-Koeffizienten zurückführen lassen. Letztere sind also von fundamentaler Bedeutung. Es läßt sich sogar vermuten, daß sie auch außerhalb der Störungstheorie die entsprechende Rolle spielen werden. Man kann also den Stellenwert der Zimmermann-Identität gar nicht überschätzen.

3.2.5 Divergenzgrade für Infrarotdivergenzen Subtraktionen im masselosen Fall

Experimentell sind das Photon und die Neutrinos mit großer Genauigkeit masselose Teilchen. Der Subtraktionsformalismus sollte also auch auf den Fall masseloser Felder ausdehnbar sein. In der bisher angegebenen Form ist das aber sicher unmöglich. Denn schon im einfachsten Beispiel

$$R(p,k) = \frac{1}{((p-k)^2 - m^2)(k^2 - m^2)} - \frac{1}{(k^2 - m^2)^2}$$
(3.2.120)

ist der Subtraktionsterm für m = 0 an der Stelle k = 0 nicht integrierbar. Diese Infrarotdivergenz (IR-) ist aber ein reines Artefakt unserer Subtraktionsvorschrift und entspricht sicher nicht einem physikalischen Effekt. (Letzterer ist z.B. die unendliche Reichweite des Coulomb-Potentials, die auch zu einer IR-Divergenz führen kann.) Wir wollen in diesem Abschnitt die Subtraktionsvorschriften so abändern, daß sie für die üblichen masselosen Felder zu konvergenten Diagrammen führen (, solange die äußeren Impulse gewisse Einschränkungen erfüllen). Die Grundidee ist sehr einfach. Man führt für ein masseloses Feld eine Hilfsmasse M(s-1) ein, subtrahiert zur Beseitigung der UV-Divergenzen an der Stelle s = 0– damit sind die oben erwähnten Schwierigkeiten vermieden –, erzwingt aber z.B. die für verschwindende Masse notwendige Normierung der Zwei-Punkt-Funktion durch nachfolgende Subtraktionen in bezug auf s - 1 an der Stelle s = 1. Der Parameter s muß also ganz ähnlich wie die Impulse behandelt werden: sowohl beim Abschätzen des Wachstumsverhaltens wie bei den Subtraktionen ist er zu berücksichtigen.

In Analogie zu (3.2.13) findet man

$$r(\gamma) = 4 - \sum_{a} r_a N_a(\gamma) + \sum_{V \in \mathcal{V}(\gamma)} (r_V - 4)$$
(3.2.121)

Hierbei gilt als IR-Grad eines 1 PI Diagramms für verschwindende Impulse und
 $s \to 1$

$$r_a = d_a$$
 für masselose Felder
 $r_a = 2$ für massive kanonische Felder mit Spin 0, 1, $\frac{1}{2}$. (3.2.122)

Ein Faktor (s-1) an einem Vertex wird mit d = r = 1 berücksichtigt, ein Faktor s mit d = 1, r = 0.

Ebenso wie man einem Vertex der UV-Dimension d_V einen größeren Grad δ_V zuordnen kann, (s. (3.2.93)), kann man ihm statt der IR-Dimension r_V auch einen kleineren Grad $\rho_V < r_V$ zuordnen. Damit wird dann als IR-Subtraktionsgrad für ein 1PI-Diagramm

$$\rho(\gamma) = 4 - \sum_{a} r_a N_a(\gamma) + \sum_{i \in \mathcal{V}(\gamma)} (\rho_i - 4)$$
(3.2.123)

definiert. Als Ergebnis einer längeren Analyse (Lowenstein 76) stellt sich heraus, daß die Waldformel (3.2.52) zu konvergenten Diagrammen führt, wenn man als Subtraktionsoperator T_{γ} mit

$$1 - T_{\gamma} = (1 - t_{p^{\gamma}, s^{\gamma} - 1}^{\rho(\gamma) - 1})(1 - t_{p^{\gamma}, s^{\gamma}}^{\delta(\gamma)})$$
(3.2.124)

wählt. Der Faktor $(1 - t_{p^{\gamma},s^{\gamma}}^{\delta(\gamma)})$ liefert die gewünschten UV-Subtraktionen (an der Stelle s = 0), der Faktor $(t - t_{p^{\gamma},s^{\gamma}-1}^{\rho(\gamma)-1})$ die gewünschten IR-Subtraktionen, die für 2- und 3-Punkt-Funktionen gerade wieder die richtige Normierung für p = 0, s = 1 erzeugen. Die beiden Subtraktionstypen sind miteinander verträglich, wenn

$$\rho(\gamma) \le \delta(\gamma) + 1 \tag{3.2.125}$$

ist. IR-Übersubtraktionen sind analog zu (3.2.95) auch noch durch die Bedingung

$$\rho(\gamma) \le r(\bar{\gamma}) + \sum_{i=1}^{c} \rho(\gamma_i) \tag{3.2.126}$$

eingeschränkt. Der Vollständigkeit halber sollten wir erwähnen, daß Normalprodukte jetzt durch zwei Indizes gekennzeichnet werden, $N_{\delta}^{\rho}[Q]$, wobei $0 \leq \rho \leq r(Q)$ den IR-Subtraktionsgrad angibt. Vertizes der Wechselwirkung sind integriert und können beliebig oft eingesetzt werden, daher müssen sie mit $\rho = \delta = 4$ gezählt werden. Andere integrierte Einsetzungen müssen nur $r \geq \rho \geq 4$ erfüllen. *Eine* Einsetzung pro Diagramm darf $\rho = 3$ haben. (3.2.125) gilt, wenn $\rho(Q) \leq \delta(Q)$ angenommen wird.

Unter diesen Bedingungen liefert die Waldformel (3.2.52) mit dem Subtraktionsoperator (3.2.124) konvergente Vertexfunktionen, solange die äußeren Impulse keine Ausnahmekonfiguration bilden. Letztere sind solche, bei denen (im Euklidischen) verschwindende Linearkombinationen existieren. Auch im Falle masseloser Felder spielen die Erweiterungen der Identität (3.2.105) eine zentrale Rolle. Als Beispiel wollen wir das Analogon zu (3.2.106) angeben

$$M^{2}(s-1)^{2}N_{2}^{2}[\varphi^{2}] \cdot \Gamma = ((1+q)N_{4}^{4}[M^{2}(s-1)^{2}\varphi^{2}] \cdot \Gamma + N_{4}^{4}[u_{1}\partial\varphi\partial\varphi + u_{2}\varphi\Box\varphi + v\varphi^{4}] \cdot \Gamma$$

$$(3.2.127)$$

Da die Faktoren (s-1) von den auszuführenden Subtraktionen betroffen sind, kann man in $[M^2(s-1)^2\varphi^2]_4^4$ nicht einfach s=1 setzen. Auf der linken Seite von (3.2.127) gehört der Faktor $M^2(s-1)^2$ nicht mehr zum Normalprodukt, so daß man dort an die Stelle s=1 gehen kann. In der masselosen Theorie gilt also

$$N_{4}^{4}[M^{2}(s-1)^{2}\varphi^{2}] \cdot \Gamma \Big|_{s=1} = -N_{4}^{4}[u_{1}^{\prime}\partial\varphi\partial\varphi + u_{2}^{\prime}\varphi\Box\varphi + v^{\prime}\varphi^{4}] \cdot \Gamma \Big|_{s=1} \qquad (3.2.128)$$
$$u_{1,2}^{\prime} = \frac{1}{1+q}u_{1,2}; \ v^{\prime} = \frac{1}{1+q}v$$

Für eine Diskussion der sonstigen Verallgemeinerungen der Zimmermann-Identitäten verweisen wir auf die Literatur (Clark/Lowenstein 76).

3.3 Stückelberg, Bogoliubov, Epstein/Glaser

Im Abschnitt 2.1 haben wir die Postulate für die S-Matrix eingeführt und gezeigt, wie sie am einfachsten Beispiel auch unmittelbar zu erfüllen sind. Wir wollen diese Diskussion jetzt wieder aufnehmen und mit einigen weiteren Beispielen vertiefen. Es soll dabei klar gemacht – wenn auch nicht streng bewiesen – werden, daß die störungstheoretische Renormierung diese Grundpostulate respektiert. Insbesondere soll herausgestellt werden, welche Freiheit dieses Schema läßt, und wie diese in Beziehung steht zur Freiheit im Impulssubtraktionsschema. Hiermit ist dann das Problem der Äquivalenz von verschiedenen Schemata angesprochen.

3.3.1 Das Beispiel : φ^2 :

Wir kehren zur Entwicklung (2.1.19)

$$S(J) = \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int T_n(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n)$$
(3.3.1)

der S-Matrix zurück und wollen das Beispiel

$$T_1(x_1) =: \varphi^2 : (x_1)$$
 (3.3.2)

näher untersuchen. Die Kausalitätsbedingung (2.1.21) lieferte in der zweiten Ordnung von ${\cal J}$

$$T_2(x_1, x_2) = \begin{cases} T_1(x_1)T_1(x_2) & \text{für } x_1 \gtrsim x_2 \\ T_1(x_2)T_1(x_1) & \text{für } x_2 \gtrsim x_1 \end{cases}$$
(3.3.3)

und für raumartiges $x_1 - x_2$

$$[T_1(x_1), T_1(x_2)] = 0 \qquad \text{für } (x_1 - x_2)^2 < 0 . \tag{3.3.4}$$

Für unser Beispiel heißt das

$$T_2(x_1, x_2) = \begin{cases} : \varphi^2 : (x_1) : \varphi^2 : (x_2) & \text{ für } x_1 \gtrsim x_2 \\ : \varphi^2 : (x_2) : \varphi^2 : (x_1) & \text{ für } x_2 \gtrsim x_1 \end{cases}$$
(3.3.5)

$$= : \varphi^{2}(x_{1})\varphi^{2}(x_{2}): + \begin{cases} 4\langle\varphi(x_{1})\varphi(x_{2})\rangle : \varphi(x_{1})\varphi(x_{2}): \\ 4\langle\varphi(x_{2})\varphi(x_{1})\rangle : \varphi(x_{1})\varphi(x_{2}): \\ + \begin{cases} 2\langle\varphi(x_{1})\varphi(x_{2})\rangle^{2} & \text{für } x_{1} \gtrsim x_{2} \\ 2\langle\varphi(x_{2})\varphi(x_{1})\rangle^{2} & \text{für } x_{2} \gtrsim x_{1} \end{cases}$$
(3.3.6)

(Hier haben wir das Wicksche Theorem (2.2.3) benutzt.) und die Frage, ob

$$C_2(x_1, x_2) = [T_1(x_1), T_1(x_2)]$$
(3.3.7)

für raumartige $x_1 - x_2$ verschwindet. Aus (3.3.6) folgt für solche Argumente

$$C_2(x_1, x_2) = 4i\Delta(x_1 - x_2) : \varphi(x_1)\varphi(x_2) : -2(\Delta_+ + \Delta_-)(\Delta_+ - \Delta_-) \quad (3.3.8)$$

d.h. in der Tat (3.3.4), denn $\Delta_+ + \Delta_-$ ist ja gerade Δ (s. (1.1.63)), und Δ verschwindet für raumartige Argumente. Da : φ^2 : auch reell ist, sind alle Bedingungen, die $T_1(x_1)$ zu erfüllen hat, nachgewiesen. Um nun systematisch den Operator $T_2(x_1, x_2)$ für alle seine Argumente zu definieren, führen wir zwei Hilfsoperatoren ein: das avancierte bzw. retardierte Produkt

$$A_2(x_1, x_2) = T_2(x_1, x_2) - T_1(x_2)T_1(x_1) , \qquad (3.3.9)$$

$$R_2(x_1, x_2) = T_2(x_1, x_2) - T_1(x_1)T_1(x_2) . (3.3.10)$$

 A_2 hat seinen Träger in $x_1 - x_2 \in \overline{V}^+$; R_2 hat seinen Träger in $x_1 - x_2 \in \overline{V}^-$. A_2 und R_2 sind mit dem Operator $C_2(x_1, x_2)$ (3.3.7) verknüpft

$$C_2(x_1, x_2) = A_2(x_1, x_2) - R_2(x_1, x_2) = [T_1(x_1), T_1(x_2)] .$$
(3.3.11)

 C_2 hat seinen Träger also im Doppelkegel $x_1 - x_2 \in \overline{V}^+ \cup \overline{V}^-$ und ist eindeutig definiert für gegebenes T_1 . Gelingt es uns, C_2 so in avancierte und retardierte Anteile zu "zerschneiden", daß deren Trägereigenschaften zu denen von A_2 bzw. R_2 passen, dann können wir über

$$T_2(x_1, x_2) = A_2(x_1, x_2) + T_1(x_2)T_1(x_1)$$
(3.3.12)

 T_2 wirklich definieren. In unserem Beispiel (3.3.2) heißt das, die Koeffizientendistributionen $\Delta_+ + \Delta_-$ bzw. $\Delta_+^2 - \Delta_-^2$ der normal geordneten Operatoren : $\varphi(x_1)\varphi(x_2)$: bzw. **1** in avancierte und retardierte Distributionen zu zerlegen. Für $\Delta_+ + \Delta_- = \Delta$ haben wir das in Abschnitt 2.1.2 zwar bereits getan (Beispiel $T_1(x_1) = \varphi(x_1)$), wollen das Resultat aber hier noch einmal in der Formulierung mit C_2 herleiten. Für $T_1(x) = \varphi(x)$ lautet C_2 :

$$C_2(x_1, x_2) = [T_1(x_1), T_1(x_2)] = [\varphi(x_1), \varphi(x_2)] = i\Delta(x_1 - x_2).$$
(3.3.13)

Mit (1.1.7) folgt

$$C_2(x_1, x_2) = i(\Delta_{av}(x_1 - x_2) - \Delta_{ret}(x_1 - x_2))$$
(3.3.14)

d.h. $C_2(x_1, x_2)$ kann ohne Subtraktion in einen avancierten und einen retardierten Anteil zerlegt werden

$$A_2(x_1 - x_2) = i\Delta_{av}(x_1 - x_2), \qquad (3.3.15)$$

$$R_2(x_1 - x_2) = -i\Delta_{ret}(x_1 - x_2).$$
(3.3.16)

Für den entsprechenden Beitrag zu (3.3.6) ergibt sich also aus (3.3.12)

$$4: \varphi(x_1)\varphi(x_2): \langle \varphi(x_1)\varphi(x_2) \rangle$$

= 4: $\varphi(x_1)\varphi(x_2): \left(i\Delta_{av}(x_1-x_2)+\langle \varphi(x_2)\varphi(x_1) \rangle\right)$
= 4: $\varphi(x_1)\varphi(x_2): \left(i\Delta_{av}(x_1-x_2)+:\varphi(x_1)\varphi(x_2): -i\Delta_{-}(x_1-x_2)\right)$
= 4: $\varphi(x_1)\varphi(x_2): \left(\Delta_c(x_1-x_2)+:\varphi(x_1)\varphi(x_2):\right)$ für $x_1 \gtrsim x_2$ (3.3.17)

Und analog aus (3.3.10)

$$4: \varphi(x_1)\varphi(x_2): \langle \varphi(x_2)\varphi(x_1) \rangle$$

= 4: $\varphi(x_1)\varphi(x_2): \left(i\Delta_{ret}(x_1 - x_2) + \langle \varphi(x_1)\varphi(x_2) \rangle\right)$
= 4: $\varphi(x_1)\varphi(x_2): \left(i\Delta_{ret}(x_1 - x_2) + \varphi(x_1)\varphi(x_2): + i\Delta_+(x_1 - x_2)\right)$
= 4: $\varphi(x_1)\varphi(x_2): \left(\Delta_c(x_1 - x_2) + \varphi(x_1)\varphi(x_2): \right)$ für $x_2 \gtrsim x_1$ (3.3.18)

D.h. dasselbe Ergebnis. Damit ist der Beitrag proportional zu : $\varphi(x_1)\varphi(x_2)$: in (3.3.6) analysiert.

Für $\Delta_+^2 - \Delta_-^2$ gehen wir folgendermaßen vor. Wir formen Δ_+^2 um

$$\begin{split} \Delta_{+}^{2}(x;m^{2}) &= \left(\frac{1}{(2\pi)^{3}} \int \frac{d^{3}p}{2\omega_{p}} e^{-ipx}\right)^{2} = \left(\frac{1}{(2\pi)^{3}} \int d^{4}p \delta(p^{2}-m^{2})\theta(p^{o})e^{-ipx}\right)^{2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{6}} \int d^{4}p_{1}d^{4}p_{2}\delta(p_{1}^{2}-m^{2})\delta(p_{2}^{2}-m^{2})\theta(p_{1}^{o})\theta(p_{2}^{o})e^{-i(p_{1}+p_{2})x} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3}} \int d^{4}p \int dM^{2}\rho_{2}(M^{2})\delta(p^{2}-M^{2})\theta(p^{o})e^{-ipx} \\ &= \int dM^{2}\rho_{2}(M^{2})\Delta_{+}(x;M^{2}) \;. \end{split}$$
(3.3.19)

Hierbei ist $\rho_2(p^2)$ gegeben durch

$$\rho_2(p^2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 p_1 d^4 p_2 \delta(p - (p_1 + p_2)) \prod_{i=1}^2 \delta(p_i^2 - m^2) \theta(p_i^o)$$
(3.3.20)

Dies ist gerade die Phasenraumfunktion für zwei Teilchen; sie hat die explizite Form

$$\rho_2(M^2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sqrt{1 - 4\frac{m^2}{M^2}} . \qquad (3.3.21)$$

(Zur Berechnung von (3.3.21) benutzt man $(p^o)^2 - \mathbf{p}^2 = M^2$ und geht dann ins Schwerpunktsystem $\mathbf{p} = 0$.)

Die Integration über M^2 in (3.3.19) beginnt also bei $M^2 = 4m^2$ und reicht bis unendlich.

Analog ergibt sich für

$$\Delta_{-}^{2}(x;m^{2}) = \int dM^{2}\rho_{2}(M^{2})\Delta_{-}(x;M^{2})$$
(3.3.22)

und damit für

$$\Delta_{+}^{2}(x;m^{2}) - \Delta_{-}^{2}(x;m^{2}) = \int dM^{2}\rho_{2}(M^{2}) \Big(\Delta_{+}(x;M^{2}) - \Delta_{-}(x;M^{2})\Big)$$

=
$$\int dM^{2}\rho_{2}(M^{2}) \ \Delta(x;M^{2})$$
(3.3.23)

Bezeichnen wir die Koeffizienten in der Entwicklung (3.3.8) mit $c_2^{(k)}(x_1, x_2)$

$$C_2(x_1, x_2) = \sum_k \frac{1}{k!} c_2^{(k)}(x_1, x_2) : \varphi^{(r-k)}(x_1)\varphi^{(r-k)}(x_2) : , \qquad (3.3.24)$$

so folgt demnach

$$c_{2}^{(2)}(x_{1}, x_{2}) = -4 \int_{4m^{2}}^{\infty} dM^{2} \rho_{2}(M^{2}) \Delta(x_{1}, x_{2}; M^{2})$$

$$= -4 \int_{4m^{2}}^{\infty} dM^{2} \rho_{2}(M^{2}) \left(\Delta_{A}(x_{1}, x_{2}; M^{2}) - \Delta_{R}(x_{1}, x_{2}; M^{2}) \right) .$$
(3.3.25)

$$\Delta_{R} = \lim_{\substack{\eta \to 0\\\eta \in V^+}} \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{e^{-ipx}}{(p \mp i\eta)^2 - M^2}$$
(3.3.26)

sind die avancierte bzw. retardierte Greensche Funktion (1.1.68-1.1.69) zur Masse M, haben gerade die gewünschten Trägereigenschaften und böten sich für die gesuchte Zerlegung von $c_2^{(2)}$ in $a_2^{(2)}$ und $r_2^{(2)}$ an. Aber die entsprechenden Integrale existieren nicht getrennt: $\rho_2(M^2)$ geht für große M^2 gegen eine Konstante, $\Delta_{A,R}$ gehen bezüglich M^2 wie M^{-2} , das Integrationsmaß dM^2 liefert eine positive Potenz M^2 , so daß also das gesamte Integral über M^2 für große M^2 logarithmisch divergiert. Wir führen daher eine Subtraktion aus und definieren

$$a_{2}^{(2)}(x_{1} - x_{2}) = \lim_{\substack{\eta \to 0\\\eta \in V^{+}}} \frac{-1}{(2\pi)^{4}} \int d^{4}p e^{-ip(x_{1} - x_{2})} \int_{4m^{2}}^{\infty} dM^{2} \rho_{2}(M^{2}) \frac{p^{2} + a^{2}}{a^{2} + M^{2}} \frac{1}{(p - i\eta)^{2} - M^{2}}$$
(3.3.27)

("eine Subtraktion ausführen" heißt

$$\lim_{\substack{\eta \to 0\\\eta \in V^+}} \left(\frac{1}{(p-i\eta)^2 - M^2} - \frac{1}{(-ia-i\eta)^2 - M^2} \right) = \lim_{\substack{\eta \to 0\\\eta \in V^+}} \frac{p^2 + a^2}{a^2 + M^2} \frac{1}{(p-i\eta)^2 - M^2}$$
(3.3.28)

zu benutzen anstatt $\lim_{\eta \to 0 \ \eta \in V^+} \frac{1}{(p-i\eta)^2 - M^2}$). Nun existiert A_2 und damit über (3.3.12) auch $T_2(x_1, x_2)$.

Das naive T-Produkt

$$a_2^{(2)}(x_1, x_2) = \theta(x_1^o - x_2^o)c_2^{(2)}(x_1, x_2)$$
(3.3.29)

entspricht dem Beitrag $\Delta_c^2(x_1 - x_2)$ zu $T_2(x_1, x_2)$, den wir in (2.1.60) berechnet und logarithmisch divergent gefunden haben. Die in (2.1.62) ausgeführte Subtraktion in Bezug auf den äußeren Impuls ist das Analogon der hier ausgeführten Subtraktion im Dispersions integral (3.3.27) und Äquivalenz der Schemata heißt, daß sich (2.1.62) von

$$t_2^{(2)}(x_1, x_2) = a_2^{(2)}(x_1, x_2) + \Delta_-^2(x_1 - x_2, m^2)$$
(3.3.30)

nur um einen konstanten Beitrag unterscheidet. Das ist seinerseits gerade die Unbestimmtheit in der Festlegung von $a_2^{(2)}$, wenn man *minimal* subtrahiert, d.h. gerade so oft wie Konvergenz erfordert, aber nicht mehr. Dann kann man noch den Subtraktionspunkt a ändern und das entspricht einer Änderung von $a_2^{(2)}$ um eine Konstante.

Im Beispiel $T_1(x_1) = \varphi(x_1)$ von Abschnitt 2.1.2 trat in C nur der Beitrag

$$c_2^{(1)}(x_1, x_2) = \Delta(x_1 - x_2) \tag{3.3.31}$$

auf; er erlaubt die Zerlegung in $\Delta_A - \Delta_R$ ohne Subtraktion und das entspricht der minimalen Subtraktion, die wir soeben eingeführt haben. Führt man dennoch Subtraktionen aus (Taylorentwicklung um p = -ia):

$$\lim_{\substack{\eta \to 0\\\eta \in V^+}} \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip(x_1 - x_2)} \left(\frac{1}{(p - i\eta)^2 - m^2} - \frac{1}{(-ia - i\eta)^2 - m^2} + \frac{p^2 + a^2}{((-ia - i\eta)^2 - m^2)^2} - \cdots \right)$$
(3.3.32)
$$= \Delta_{av} + const. \ \delta(x_1 - x_2) + (\Box + const.)\delta(x_1 - x_2) + \cdots,$$

so findet man das Polynom $P(\Box)\delta(x_1-x_2)$, von dem wir in (2.1.37) als allgemeinster Lösung gesprochen haben. Es ist als Lösung des Zerschneideproblems erlaubt und kann nur mit dem zusätzlichen Postulat der minimalen Subtraktion ausgeschlossen werden. Betrachten wir nun für das gegenwärtige Beispiel $T_1 =: \varphi^2$: höhere Beiträge zur S-Matrix, so ist als Folge des Wickschen Theorems klar, daß keine weiteren Divergenzen auftreten als die, die wir in $a_2^{(2)}$ beseitigt haben: in der Sprache der Feynman-Diagramme läßt sich am leichtesten sehen, daß nur unzusammenhängende Produkte $a_2^{(2)}(x_1, x_2)a_2^{(2)}(x_3, x_4)$ usw. gebildet werden können. Eine einzige Subtraktion macht das einzige divergente Diagramm

$$: \varphi^{2} : (x_{1}) : \varphi^{2} : (x_{2})$$

$$x \longrightarrow x$$
Abb. 3.1

konvergent. Mit dem obigen $a_2^{(2)}$ ist also die ganze S-Matrix konvergent.

3.3.2 Das Beispiel : φ^r :

Als allgemeineres Beispiel wollen wir noch

$$T_1(x_1) = \frac{1}{r!} \colon \varphi^r \colon (x_1)$$
 (3.3.33)

etwas verfolgen. Man kann zeigen, daß

$$[T_1(x_1), T_1(x_2)] = 0 \qquad \text{für } (x_1 - x_2)^2 < 0 \tag{3.3.34}$$

d.h. die Kausalitätsbedingung ist erfüllt; T_1 ist offensichtlich reell. Somit wird eine Zerschneidevorschrift für

$$C_2(x_1, x_2) = [T_1(x_1), T_1(x_2)] = A_2(x_1, x_2) - R_2(x_1, x_2)$$
(3.3.35)

gesucht, damit dann

$$T_2(x_1, x_2) = \begin{cases} T_1(x_1)T_1(x_2) & \text{ für } x_1 \gtrsim x_2 \\ T_1(x_2)T_2(x_1) & \text{ für } x_2 \gtrsim x_1 \end{cases}$$
(3.3.36)

durch

$$T_2(x_1, x_2) = A_2(x_1, x_2) + T_1(x_2)T_1(x_1)$$
(3.3.37)

auf alle Argumente fortgesetzt werden kann. In Analogie zum Fall r = 2 benutzen wir wieder das Wicksche Theorem (2.2.3) und schreiben

$$T_{1}(x_{1})T_{1}(x_{2}) = \frac{:\varphi^{r}:(x_{1}):\varphi^{r}:(x_{2})}{r!}$$

$$= \sum_{k} \left\langle \frac{:\varphi^{k_{1}}:(x_{1}):\varphi^{k_{2}}:(x_{2})}{k_{1}!} \frac{:\varphi^{k_{2}}:(x_{2})}{k_{2}!} \right\rangle \frac{:\varphi^{r-k_{1}}(x_{1})\varphi^{r-k_{2}}(x_{2}):}{(r-k_{1})!(r-k_{2})!}$$
(3.3.38)

wobei die Summe über $0 \leq k_1 \leq r, \, 0 \leq k_2 \leq r$ läuft. Entsprechend haben wir dann

$$C^{r}(x_{1}, x_{2}) = \left[\frac{\vdots \varphi^{r} \colon (x_{1})}{r!}, \frac{\vdots \varphi^{r} \colon (x_{2})}{r!}\right] = \sum_{k} c_{2}^{(k)}(x_{1}, x_{2}) \frac{\vdots \varphi^{r-k_{1}}(x_{1})\varphi^{r-k_{2}}(x_{2}) \colon}{(r-k_{1})!(r-k_{2})!}$$
(3.3.39)

 mit

$$c_2^{(k)}(x_1, x_2) = \left\langle \left[\frac{\varphi^{k_1} \colon (x_1)}{k_1!}, \frac{\varphi^{k_2} \colon (x_2)}{k_2!} \right] \right\rangle.$$

Die Erwartungswerte $p_2^{k_1,k_2}(x_1,x_2)$ in (3.3.38) sind nur von Null verschieden, wenn $k_1 = k_2 \equiv k$ ist und dann gilt

$$p_2^{(k)}(x_1, x_2) = \frac{1}{(k!)^2} \langle \varphi(x_1)\varphi(x_2) \rangle^k = \frac{1}{(k!)^2} \Delta_+^k(x_1 - x_2)$$
(3.3.40)

3.3. STÜCKELBERG, BOGOLIUBOV, EPSTEIN/GLASER

Wie für den Fall n = 2 kann man sich davon überzeugen, daß

$$\Delta^{n}_{+}(x;m^{2}) = \frac{1}{(2\pi)^{3}} \int dp^{4} \int dM^{2} \rho_{n}(M^{2}) \delta(p^{2} - M^{2}) \theta(p^{o}) e^{-ipx}$$

$$= \int dM^{2} \rho_{n}(M^{2}) \Delta_{+}(x;M^{2})$$
(3.3.41)

 mit

$$\rho_n(p^2) = \frac{1}{(2\pi)^{3(n-1)}} \int d^4 p_1 \dots d^4 p_n \delta^4 (p - (p_1 + \dots + p_n)) \prod_{i=1}^n \delta(p_i^2 - m^2) \theta(p_i^o)$$
(3.3.42)

Entsprechend folgt

$$c_2^{(k)}(x_1, x_2) = \frac{i}{k!} \int_{4m^2}^{\infty} dM^2 \rho_{k_1}(M^2) \Delta(x_1 - x_2; M^2)$$
(3.3.43)

Die Zerlegung von $c_2^{(k)}$ in avancierte und retardierte Anteile macht Subtraktionen erforderlich:

$$c_{2}^{(k)} = -\frac{i}{k} \int \frac{d^{4}p}{(2\pi)^{4}} e^{-ip(x_{1}-x_{2})} (p^{2}+a^{2})^{k-1} \lim_{\eta \to 0 \atop \eta \in V^{+}} \int dM^{2} \frac{1}{(M^{2}+a^{2})^{k-1}} \times \left(\frac{1}{(p-i\eta)-M^{2}} - \frac{1}{(p+i\eta)^{2}-M^{2}}\right) \rho_{k}(M^{2})$$

$$(3.3.44)$$

$$\equiv a_2^{(k)}(x_1, x_2) - r_2^{(k)}(x_1, x_2) \tag{3.3.45}$$

$$a_2^{(k)}(x_1, x_2) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x_1 - x_2)} \tilde{a}_2^{(k)}(p)$$
(3.3.46)

$$\tilde{a}_{2}^{(k)}(p) = -\frac{i}{k!}(p^{2} + a^{2})^{k-1} \lim_{\eta \to o \atop \eta \in V^{+}} \int dM^{2} \frac{\rho_{k}(M^{2})}{(M^{2} + a^{2})^{k-1}} \frac{1}{(p - i\eta)^{2} - M^{2}}$$
(3.3.47)

Zur Definition (3.3.45) bzw. (3.3.47) sind einige Bemerkungen angebracht.

- Es handelt sich um ein subtrahiertes Dispersions integral, das (außer für k = 0, 1) divergent ist.
- Die ausgeführten Subtraktionen sind minimal: \tilde{a}_2 wächst mit derselben Potenz wie \tilde{c}_2 für $p^2 \to \infty$. Subtrahiert man weniger, so stößt man auf Divergenzen, subtrahiert man mehr, dann führt man zusätzliche Willkür ein und \tilde{a}_2 wächst stärker an als \tilde{c}_2 .

- Im Integral für $\tilde{c}_2^{(k)}$ tragen die Subtraktionen nicht bei, denn

$$\left(\frac{p^2+a^2}{M^2+a^2}\right)^{k-1} \lim_{\eta \to o \atop \eta \in V^+} \left[\frac{1}{(p-i\eta)^2 - M^2} - \frac{1}{(p+i\eta)^2 - M^2}\right] dM^2$$

$$\xrightarrow{\eta \to o} 2\pi i \delta(p^2 - M^2)$$
(3.3.48)

- Die speziell gewählte Lösung \tilde{a}_2 hängt von a ab; allgemeiner unterscheiden sich zwei im obigen Sinne minimale Lösungen höchstens um ein Polynom vom Grade k - 2 in p^2 .

Mit Hilfe der Distributionen $a_2^{(k)}(x_1, x_2)$ können wir nun die Operatoren konstruieren, die alle gewünschten Eigenschaften haben:

$$A_2^r(x_1, x_2) = \sum_k a_2^{(k)}(x_1, x_2) \frac{:\varphi^r(x_1)\varphi^r(x_2):}{((r-k)!)^2}$$
(3.3.49)

(in der Summe trägt nur $k_1 = k_2 = k$ bei).

Der entsprechende Ausdruck für $T_2^{r,r}(x_1, x_2)$ ist wohl-definiert, im Gegensatz etwa zu dem naiv Zeit-geordneten

$$T\left(\frac{:\varphi^r:(x_1)}{r!}\frac{:\varphi^r:(x_2)}{r!}\right).$$

Wir wollen darauf verzichten, für dieses Beispiel die höheren Beiträge $T_n(x_1 \dots x_n)$ zu diskutieren, denn sie erfordern eine ziemlich gewichtige Maschinerie und es ist nicht unser Ziel, parallel zum Impulssubtraktionsschema ein weiteres ausführlich darzustellen. Vielmehr sollte die gegenwärtige Diskussion nur zu einer ungefähren Skizze führen, wie zwei Renormierungsschemata zu vergleichen sind.

3.3.3 Äquivalenz

Hierzu ist es sehr instruktiv, die Freiheit, die das Epstein-Glaser Verfahren läßt, noch einmal in einer anderen Form darzustellen. Bisher drückte sie sich darin aus, daß ein Polynom vom Grade k - 2 in p^2 frei zur Verfügung stand. Eine andere Betrachtungsweise ist die folgende.

Die Zerschneidevorschrift für C_2 kann nicht eindeutig sein. Denn

$$A_2' = A_2 + \Lambda_2 \tag{3.3.50}$$

$$R_2' = R_2 + \Lambda_2 \tag{3.3.51}$$

100
3.4. BIBLIOGRAPHISCHE ANGABEN

sind ebenfalls zugelassene Zerlegungen von C_2 , wenn nur Λ_2 seinen Träger in $\bar{V}^+ \cap \bar{V}^- = \{x_1 = x_2\}$ hat. Die Relation dritter Ordnung in J in (2.1.21) liefert eine Einschränkung für Λ_2 . Es gilt nämlich

$$T_3(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} T_2(x_1, x_2)T_1(x_3) & x_1, x_2 \gtrsim x_3 \\ T_1(x_3)T_2(x_1x_2) & x_3 \gtrsim x_1, x_2 \end{cases}$$
(3.3.52)

d.h.

$$[T_2(x_1, x_2), T_1(x_3)] = 0 \qquad x_1, x_2 \sim x_3 \tag{3.3.53}$$

Soll (3.3.52) auch für T'_2 erfüllt sein, dann muß

$$[\Lambda_2(x_1, x_2), T_1(x_3)] = 0 \qquad x_1, x_2 \sim x_3 \tag{3.3.54}$$

sein. Nun ist es der Inhalt eines Theorems von Epstein/Schroer, daß hieraus

$$\Lambda_2(x_1, x_2) = \sum_{\alpha} D^{\alpha} \delta(x_1 - x_2) P_{\alpha}(x_2)$$
(3.3.55)

folgt, wobei D^{α} endliche Ableitungen symbolisiert und $P_{\alpha}(x_1)$ eine endliche Summe von Wick-Polynomen ist. Dessen Operatornatur können wir dadurch einschränken, daß wir fordern, diese Operatoren sollten nicht vom Typ, den $T_2(x_1, x_2)$ hat, abweichen. Denn für eine Untermenge von Testfunktionen, kann man $T_2(x_1, x_2)$ ja durchaus auf $x_1 = x_2$ fortsetzen, ohne es abzuändern. Diese Einschränkung entspricht auf Operatorebene gerade der oben formulierten minimalen Subtraktion bei den Dispersionsintegralen. Umgekehrt ist die Freiheit der Wahl von Λ_2 der Punkt, an dem man am einfachsten mit dem Impulssubtraktionsschema vergleichen kann. Impulssubtraktionen bedeuteten genau dasselbe: Verfügen über polylokale Terme in der S-Matrix, Abänderung (bzw. Definition) des T-Produkts in wohlbestimmter Weise. Und das charakterisiert zwei Renormierungsschemata als äquivalent: wenn nämlich die Greenschen Funktionen durch endliche Umrenormierung ineinander überführt werden können und sie in wenigstens einem der beiden Schemata die Axiome erfüllen, dann nennen wir die zwei Schemata äquivalent. Die obigen Betrachtungen sind eine Skizze davon, wie ein Äquivalenzbeweis zu führen ist.

3.4 Bibliographische Angaben

Die fundamentalen Originalarbeiten zum Impulssubtraktionsschema in 3.2 sind: Zimmermann 68,69,73 im massiven Fall. Im masselosen Fall stammt das relevante "Power counting theorem" von Lowenstein/Zimmermann 75, das Subtraktionsverfahren von Lowenstein 76. Verallgemeinerungen der Zimmermann-Identität sind zu finden in Clark/Lowenstein 76. Unsere Darstellung stützt sich auf die Vorlesungen von Lowenstein (Maryland) und Lowenstein (Erice). Die Beispiele, die das Epstein/Glaser-Verfahren (in 3.3) erläutern sollen, sind einer nicht publizierten Vorlesung von P. Breitenlohner entnommen. Die axiomatische Charakterisierung von Renormierungsverfahren findet man bei Hepp (Les Houches). Sie bildet die Basis für strenge Äquivalenzbeweise.

Kapitel 4

Das Wirkungsprinzip und seine Anwendungen

Das Wirkungsprinzip beschreibt den Effekt, den Änderungen von Parametern und Feldern nach sich ziehen. Es ist das wichtigste Hilfsmittel, um die Abhängigkeit der Theorie von Parametern zu verfolgen, und um Symmetrieforderungen umzusetzen. Die spezifischen Eigenheiten der Quantenfeldtheorie geben ihm seinen nicht-trivialen Gehalt.

4.1 Die Differentiation nach Parametern

4.1.1 Ein-Schleifen-Näherung. Konvergente Diagramme

Das einfachste Beispiel einer Feldtheorie ist die quantisierte Erweiterung der klassischen Wirkung

$$\Gamma_{cl} = \int \left(-\frac{1}{2}\varphi(\Box + m^2)\varphi - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4\right).$$
(4.1.1)

Parameter dieses Modells sind in der klassischen Näherung m und λ , die wir auch in der quantisierten Theorie mit der physikalischen Masse und der Stärke der Wechselwirkung in Verbindung bringen möchten.

Vertexfunktionen $\Gamma_{2N}(q_1, \ldots, q_{2N})$ (mit $N \ge 3$) sind gemäß (2.2.31) bzw. (2.2.33) zusammen mit (2.2.13) in der Ein-Schleifen-Näherung konvergent und daher ganz naiv definiert:

$$\Gamma_{2N}(q_1, \dots, q_{2N}) = a_N \lambda^N \int \underbrace{\frac{i}{(k-p_1)^2 - m^2} \cdot \frac{i}{(k-p_1-p_2)^2 - m^2} \cdots \frac{i}{k^2 - m^2}}_{\text{N Propagatoren}}$$
(4.1.2)

Feynmandiagramm:

$$\begin{array}{c} \overbrace{}^{1} \\ \overbrace{}^{2} \\ \overbrace{}^{N} \end{array} \qquad a_{N} : \text{Wick-Faktor} \\ p_{1} = q_{1} + q_{2} \, , p_{2} = q_{3} + q_{4} , \dots \\ p_{N} = q_{2N-1} + q_{2N} \end{array}$$

Entsprechend na
iv lassen sich Ableitungen nach den Parametern m^2 bzw
. λ berechnen. Z.B. fürN=3

$$\begin{aligned} \partial_{m^{2}}\Gamma_{6}(q_{1},\ldots,q_{6}) &= \\ a_{3}\lambda^{3}\int \frac{dk}{(2\pi)^{4}} \left(\frac{i}{k^{2}-m^{2}} \cdot \frac{+1}{k^{2}-m^{2}} \cdot \frac{i}{(k-p_{1})^{2}-m^{2}} \cdot \frac{i}{(k-p_{1}-p_{2})^{2}-m^{2}} \right. \\ &+ \frac{i}{k^{2}-m^{2}} \cdot \frac{i}{(k-p_{1})^{2}-m^{2}} \cdot \frac{+1}{(k-p_{1})^{2}-m^{2}} \cdot \frac{i}{(k-p_{1}-p_{2})^{2}-m^{2}} \\ &+ \frac{i}{k^{2}-m^{2}} \frac{i}{(k-p_{1})^{2}-m^{2}} \cdot \frac{i}{(k-p_{1}-p_{1})^{2}-m^{2}} \cdot \frac{1}{(k-p_{1}-p_{2})^{2}-m^{2}} \\ &= \left(-\frac{1}{2}[\tilde{\varphi}^{2}(0)] \cdot \Gamma\right)_{6}(q_{1},\ldots,q_{6}) \end{aligned}$$
(4.1.3)

Mit dieser Gleichung wird also behauptet, daß Differentiation nach dem Parameter m^2 gleichbedeutend ist mit der Einsetzung des integrierten Vertex $\int dx(-\frac{1}{2}\varphi^2)$ in Γ . (Äußerer Impuls = 0 am Vertex φ^2 entspricht der Integration im Ortsraum.) Da die behandelten Diagramme endlich sind, ist nur die Kombinatorik und Richtigkeit von Faktoren *i* und dergleichen zu prüfen. Diagrammatisch liest sich (4.1.3)

$$\partial_{m^2}$$
 $\overset{\checkmark}{\bigcirc}$ = $\overset{\checkmark}{\bigcirc}$ + $\overset{\checkmark}{\bigcirc}$ +

und die Kontrolle der Faktoren ist trivial, wenn man den relativen Faktor *i* zwischen Γ und *Z* berücksichtigt (s. (2.3.32), (2.3.33)). Die Verallgemeinerung auf $\Gamma_{2N} N > 3$ ist klar.

Die Differentiation nach der Kopplungskonstanten λ liefert

$$\partial_{\lambda}\Gamma_{6}(q_{1},\ldots,q_{6}) = 3a_{3}\lambda^{2}\int \frac{dk}{(2\pi)^{4}}I_{6}(k,p_{1},p_{2},p_{3})$$
 (4.1.4)

mit der diagrammatischen Darstellung



Das Ergebnis (4.1.3) und die Formel (2.2.31), die ja für endliche Diagramme naiv gelten sollte, legen nahe, die rechte Seite von (4.1.4) ebenfalls als Einsetzung zu interpretieren.

$$\partial_{\lambda}\Gamma_6(q_1,\ldots,q_6) = (\Delta_4 \cdot \Gamma)_6(q_1,\ldots,q_6) \tag{4.1.5}$$

Im Ortsraum – so lautet die Behauptung – hat Δ_4 die Form

$$\Delta_4 = -\frac{1}{4!} \int \varphi^4. \tag{4.1.6}$$

Daß Δ_4 eine *integrierte* Einsetzung sein muß, ist klar, denn die Differentiation nach λ hat nicht in die Impulsstruktur des Diagramms eingegriffen. Da auch keine Subtraktionen vorzunehmen sind, muß man lediglich die Kombinatorik und die Faktoren *i* überprüfen.

Kombinatorik:

ohne Einsetzung:

$$\langle \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_6)e^{i\int \mathcal{L}_{int}}\rangle^{1\mathrm{PI}} \to \left(-\frac{\lambda}{4!}\right)^3 \frac{i^3}{3!}$$
 Wick

mit Einsetzung:

$$\left\langle \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_6)(-\frac{1}{4!})\int \varphi^4 e^{i\int\mathcal{L}_{int}}\right\rangle^{1\text{PI}} \to \left(-\frac{1}{4!}\right)\left(-\frac{\lambda}{4!}\right)^2 \frac{i^2}{2!} \cdot \text{Wick } i \quad (4.1.7)$$

(Wick $=3 \cdot (4!)^4$; *i*: relatives *i* zwischen Z und Γ (vergl. (2.3.32).)

Damit ist (4.1.5) mit (4.1.6) gezeigt. Für N > 3 ist das Ergebnis dann auch klar.

Die Rechnung lehrt unter anderem, daß es für die Herleitung bequem ist, die *allgemeinen* Greenschen Funktionen heranzuziehen. Denn für sie haben wir eine explizite Formel: (2.2.33) mit Wickschem Theorem (2.2.13) und Waldformel (3.2.98) oder aber (2.2.31)

$$Z(j) = e^{i \int \mathcal{L}_{int}(\frac{\partial}{i\delta j})} \quad Z_o(j) \tag{4.1.8}$$

$$Z_o(j) = e^{\frac{1}{2} \int ij\Delta_c ij} \tag{4.1.9}$$

Denken wir uns \mathcal{L}_{int} nun erweitert auf zusätzliche Wechselwirkungen und j auf ein ganzes Multiplett von Quellen (d.h. für ein Multiplett von Feldern), so ist die Folgerung aus der obigen Untersuchung, daß für konvergente Diagramme die Ableitungen nach den Kopplungen immer gerade den zugehörigen (integrierten) Wechselwirkungsvertex, die Ableitungen nach Massen immer den zugehörigen bilinearen Massenterm als Einsetzung erzeugt:

$$\partial_{\lambda} Z(j) = i \int \mathcal{L}_{int}^{(\lambda)} \left(\frac{\delta}{i\delta j}\right) e^{i \int \mathcal{L}_{int}\left(\frac{\delta}{i\delta j}\right)} Z_o(j) \tag{4.1.10}$$

$$\partial_m Z(j) = e^{i \int \mathcal{L}_{int}(\frac{\partial}{i\delta j})} \partial_m Z_o(j)$$

= $e^{i \int \mathcal{L}_{int}(\frac{\delta}{i\delta j})} \frac{1}{2} \int ij \partial_m \Delta_c ij Z_o(j)$ (4.1.11)

Diese Ergebnisse können sehr elegant zusammengefaßt werden, wenn wir eine neue Größe einführen:

$$\partial_{\lambda} Z = i [\partial_{\lambda} \Gamma_{eff}] \cdot Z \tag{4.1.12}$$

$$\partial_m Z = i [\partial_m \Gamma_{eff}] \cdot Z \tag{4.1.13}$$

 Γ_{eff} war in der bisherigen Rechnung nichts anderes als Γ_{cl} . In höheren Ordnungen werden wir sogenannte Gegenterme zulassen:

$$\Gamma_{eff} = \int \left(-\frac{1}{2} (1+z)\varphi \Box \varphi - \frac{1}{2} (m^2 + a)\varphi^2 - \frac{\hat{\lambda}}{4!}\varphi^4 \right)$$
(4.1.14)

mit $z = z(\lambda), a = a(\lambda), \hat{\lambda} = \lambda + O(\lambda^2)$ Potenzreihen in λ . Die Formeln (4.1.12, 4.1.13) bleiben auch dann noch gültig.

Identifizieren wir einen integrierten Wechselwirkungsvertex z.B. $-\frac{\lambda}{4!}\int \varphi^4 = \lambda \Delta_4$ mit $\int \mathcal{L}_{int}(\frac{\delta}{i\delta j})$ in (4.1.8), so sehen wir, daß Δ_4 "auf den freien Greenschen Funktionen operiert": gerade so wie die Ableitungen $\int (\frac{\delta}{i\delta j})^4$.

4.1.2 Ein-Schleifen-Näherung. Divergente Diagramme.

In der φ^4 -Theorie (4.1.1) gibt es in der Ein-Schleifen-Näherung nur zwei divergente Diagramme

$$N = 1$$
 \bigcirc , $N = 2$ \checkmark

Im Impulssubtraktionsschema, das wir im Augenblick anwenden, verschwindet das erste Diagramm identisch, denn die innere Linie hängt nicht vom äußeren Impuls ab:

$$R_{\gamma} = I_{\gamma}(k) - I_{\gamma}(k) \Big|_{p=0} = 0$$
(4.1.15)

Das zweite Diagramm divergiert logarithmisch und führt zur 4-Punkt-Funktion

$$\Gamma_4^{(1)}(q_1,\ldots,q_4) = a_2 \lambda^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \left(\frac{i^2}{((p-k)^2 - m^2)(k^2 - m^2)} - \frac{i^2}{(k^2 - m^2)^2} \right)$$
(4.1.16)

Die Ableitung nach λ ändert nichts am Integranden, so daß wir genau wie im konvergenten Fall

$$\partial_{\lambda} \Gamma_4^{(1)} = (\Delta_4 \cdot \Gamma)_4^{(1)} \tag{4.1.17}$$

schreiben können. Die Kombinatorik und die Faktoren *i* ergeben sich wie oben. Neu ist jetzt die Subtraktion. Wir können sie damit erfassen, daß wir Δ_4 als Normalprodukt mit $\delta = 4$ interpretieren und für $\Delta_4 \cdot \Gamma$ den Subtraktionsgrad gemäß

$$\delta(\gamma) = 4 - N + (\delta(\Delta_4) - 4) = 4 - N \tag{4.1.18}$$

d.h.

$$\delta(\gamma) = 0 \tag{4.1.19}$$

für N = 4 vorschreiben. Dann und nur dann gelangen wir von (4.1.16) nach Differentiation zu (4.1.17). Diese Vorschrift paßt dazu, daß wir die integrierten Vertizes $\int \mathcal{L}_{int}$ in der Definition von Normalprodukten (s. Abschnitt 3.2.4) mit $d = \delta = 4$ behandelt haben.

Die Ableitung nach m^2 auf $\Gamma_4^{(1)}$ führt zu

$$\partial_{m^{2}}\Gamma_{4}^{(1)}(q_{1},\ldots,q_{4}) = a_{2}\lambda^{2}\int \frac{dk}{(2\pi)^{4}} \left(\frac{i}{(p-k)^{2}-m^{2}} \cdot \frac{+1}{(p-k)^{2}-m^{2}} \cdot \frac{i}{k^{2}-m^{2}} + \frac{i}{(p-k)^{2}-m^{2}} \cdot \frac{i}{k^{2}-m^{2}} \cdot \frac{+1}{k^{2}-m^{2}} - \frac{2i^{2}}{(k^{2}-m^{2})^{3}}\right)$$

$$(4.1.20)$$

Auch hier ist im Vergleich mit dem konvergenten Fall (4.1.3) sofort klar, daß Kombinatorik und Faktoren i die Umformulierung

$$\partial_{m^2} \Gamma_4^{(1)} = (\Delta_2 \cdot \Gamma)_4^{(1)}$$

mit $\Delta_2 = N_4 [-\frac{1}{2} \int \varphi^2]$ (4.1.21)

erlauben. Und genau wie für Δ_4 zwingt die Anwesenheit des Subtraktionsterms dazu, der bilinearen Einsetzung Δ_2 den Subtraktionsgrad $\delta = 4$ zuzuordnen. Nur dann führt (4.1.21) zu (4.1.20). Die Notwendigkeit, $\Gamma_4^{(1)}$ zu subtrahieren, hat also die Konsequenz, daß ∂_{m^2} die *übersubtrahierte* Einsetzung erzeugt. Natürlich wäre $([\int (-\frac{1}{2}\varphi^2)]_2\Gamma)_4^{(4)}$ – die minimal subtrahierte Einsetzung – bereits konvergent, aber sie unterscheidet sich eben von $\partial_{m^2}\Gamma$ um den (differenzierten) Subtraktionsterm. Wir werden im Abschnitt 4.5.3 eine physikalische Interpretation für ihn finden.

Die Ergebnisse (4.1.17) und (4.1.21) (mit $\delta = 4$) lassen sich wie im konvergenten Beispiel in der Form

$$\partial_A \Gamma = [\partial_A \Gamma_{eff}]_4 \cdot \Gamma \qquad A \equiv m^2, \lambda \tag{4.1.22}$$

zusammenfassen. Es ist nach der obigen Herleitung klar, daß der Subtraktionsgrad $\delta = 4$ für Γ_{eff} keine freie Wahl darstellt, sondern eine Konsequenz der Definition von Γ ist. Die Subtraktionsterme in der Berechnung von Γ hatten diesen Wert erzwungen.

4.1.3 Höhere Ordnungen

Die Tatsache, daß ein Wechselwirkungsvertex aus Γ_{int} mit einem integrierten Normalprodukt des Subtraktionsgrades $\delta = 4$ identifiziert werden kann, hat eine interessante Konsequenz. Wie schon am Ende von 4.1.1 angedeutet, können wir der Formel (4.1.8) einen präzisen Gehalt geben:

$$Z = e^{i\Gamma_{\rm int}} Z_o \tag{4.1.23}$$

Hierbei ist Γ_{int}

$$\Gamma_{\text{int}} = z\Delta_1 + a\Delta_2 + \lambda\Delta_4$$

$$\Delta_1 = \left[\int \frac{1}{2} \partial \varphi \partial \varphi\right]_4$$

$$\Delta_2 = \left[-\frac{1}{2} \int \varphi^2\right]_4$$

$$\Delta_4 = \left[-\frac{1}{4!} \int \varphi^4\right]_4$$
(4.1.24)

 Z_o ist das erzeugende Funktional der freien Greenschen Funktionen (1.4.6)

$$Z_o = \langle T e^{i \int j\varphi} \rangle \tag{4.1.25}$$

Die Herleitung von (2.2.31) und die Gültigkeit für endliche Diagramme erlaubt die Übernahme von (4.1.23) für divergente Diagramme mit der obigen Interpretation von Γ_{int} . Die Gell-Mann-Low-Formel (2.2.33) verbunden mit der Waldformel (3.2.98) ist dann eine Konsequenz von (4.1.23). Natürlich gilt auch die Umkehrung. Nach diesen Vorbemerkungen ist klar, daß (4.1.22) für alle Ordnungen gilt, wenn

$$\Gamma_{eff} = \Delta_1 + m^2 \Delta_2 + \Gamma_{\rm int} \tag{4.1.26}$$

gewählt wird. Die Potenzreihen $z = z(\lambda), a = a(\lambda), \hat{\lambda} = \lambda + O(\lambda^2)$ in λ werden fixiert durch Normierungsbedingungen. Wir wählen

$$\Gamma_{\varphi\varphi}(p^2 = m^2) = 0$$

$$\partial_{p^2}\Gamma_{\varphi\varphi}(p^2 = \kappa^2) = 1$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi\varphi\varphi\varphi}(p = p_{sym}) = -\lambda$$
(4.1.27)

Hierbei ist der symmetrische Punkt p_{sym} durch die folgenden Bedingungen festgelegt:

$$p_i^2 = \kappa^2, (p_i + p_j)^2 = \frac{4}{3}\kappa^2$$
 für $i \neq j$ (4.1.28)

Wir wollen dieses Ergebnis noch einmal anders beleuchten und damit verallgemeinern. Die klassische Wirkung (4.1.1) führt in natürlicher Weise zur Definition von Γ_{int} und seinen Einsetzungen (4.1.24) und damit nur zu endlich vielen Klassen von divergierenden Diagrammen. Denn der naive Divergenzgrad $d(\gamma)$ (3.2.13) ist in diesem Beispiel nur für Diagramme mit zwei bzw. vier äußeren Beinen nichtnegativ. Allgemeiner nennen wir nun Modelle, die mit solchen Wechselwirkungseinsetzungen definiert sind, daß sie nur zu endlich vielen Klassen divergierender Diagramme führen, renormierbar gemäß "power counting"; Modelle, die Wechselwirkungseinsetzungen mit $\delta > 4$ aufweisen, nennen wir nicht-renormierbar (gemäß "power counting"). Ein Modell ist eine Theorie – und damit im strengen Sinne renormierbar –, wenn es nicht nur "power-counting"-renormierbar ist, sondern alle Axiome erfüllt.

4.2 Differentiation nach Feldern. Bewegungsgleichungen

4.2.1 Lineare Feldgleichung

Wir betrachten in der $\varphi^4\text{-}\mathrm{Theorie},$ die durch (4.1.23) definiert ist, eine Greensche Funktion

$$G(x, x_1, \dots, x_n) = R \langle T(\varphi(x)\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)e^{i\int \mathcal{L}_{int}}) \rangle$$
(4.2.1)

 $(R \text{ symbolisiert die Subtraktionen gemäß der Waldformel (3.2.98); alle Größen auf der rechten Seite von (4.2.1) sind solche der freien Theorie). Diagrammatisch lassen sich die Beiträge zu <math>G$ folgendermaßen wiedergeben:



(eine äußere Linie kann einfach durchlaufen, an einem φ^4 -Vertex oder einem bilinearen Vertex ankommen, s. (4.1.23). Das Zeichen $\check{}$ über einem Argument bedeutet Weglassen des Arguments.)

Um zur Bewegungsgleichung für $\varphi(x)$ zu gelangen, wenden wir $\Box_x + m^2$ auf $G(x, x_1, \ldots, x_n)$ an und finden – in der Reihenfolge der Diagramme geordnet – die folgenden Beiträge (Wellenfunktionsrenormierung unterdrückt):

$$\begin{split} \langle T((\Box_x + m^2)\varphi(x)\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)e^{i\int\mathcal{L}_{\mathrm{int}}})\rangle \\ &= \sum_k (\Box_x + m^2)\frac{1}{(2\pi)^4} \int dp e^{-ip(x-x_k)} \frac{i}{p^2 - m} G(x_1,\dots\check{x}_k\dots,x_n) \\ &+ (\Box_x + m^2)\frac{1}{(2\pi)^4} \int dp dz e^{-ip(x-z)} \frac{i}{p^2 - m^2} (-\frac{i\lambda}{4!}) \cdot 4 \cdot \varphi^{3} \underbrace{(z)\varphi\varphi\dots} \\ &+ (\Box_x + m^2)\frac{1}{(2\pi)^4} \int dp dz e^{-ip(x-z)} \frac{i}{p^2 - m^2} (-\frac{ia}{2}) \cdot 2 \cdot \varphi(z)\varphi\varphi\dots \\ &= \sum_k (-i)\delta(x - x_k)G(x_1,\dots\check{x}_k\dots,x_n) \\ &- \frac{i}{(2\pi)^4} \int dp dz e^{-ip(x-z)} (-\frac{i\lambda}{3!}) \varphi^{3} \underbrace{(z)\varphi\varphi\dots} \\ &= \sum_k (-i)\delta(x - x_k)G(x_1,\dots\check{x}_k\dots,x_n) \\ &= \sum_k (-i)\delta(x - x_k)G(x_1,\dots\check{x}_k\dots,x_n) \\ &- i(-\frac{i\lambda}{3!}) \left\langle T\left(\varphi^3(x)\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)e^{i\int\mathcal{L}_{\mathrm{int}}}\right) \right\rangle \\ &- i(-ia) \left\langle T\left(\varphi(x)\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)e^{i\int\mathcal{L}_{\mathrm{int}}}\right) \right\rangle \end{split}$$

$$(4.2.2)$$

Hieraus folgt

$$0 = \sum_{k} (-i)\delta(x - x_{k})G(x_{1}, \dots \check{x}_{k}, \dots, x_{n}) + \left\langle T\left(\frac{\delta\Gamma_{eff}}{\delta\varphi(x)}\varphi(x_{1})\dots\varphi(x_{n})e^{i\int\mathcal{L}_{int}}\right) \right\rangle$$

$$(4.2.3)$$

Diese Rechnung ist solange formal, wie wir nicht angeben, wie die notwendigen Subtraktionen auszuführen sind. Das soll jetzt geschehen. Am φ^4 -Vertex \times , der mit $\delta = 4$ zum Subtraktionsgrad beigetragen hatte, war *eine* Linie immer eine äußere (die in *x* endende), also war der effektive Subtraktionsgrad $\delta_{eff} = 4 - 1 =$ 3. Nachdem diese äußere Linie durch den Differentialoperator $\Box_x + m^2$ amputiert ist, hat sich für diesen Vertex nichts geändert – er trägt weiterhin mit $\delta = \delta_{eff} = 3$

4.2. DIFFERENTIATION NACH FELDERN. BEWEGUNGSGLEICHUNGEN111

bei. D.h. die Zuordnung $N_3[\varphi^3]$ ist die richtige. Für den bilinearen Vertex stellt sich die Frage nach dem Subtraktionsgrad nicht, denn er kann nicht Teil eines 1PI-Diagramms (d.h. eines Renormierungsteils) sein – unabhängig davon, ob die äußere Linie amputiert ist oder nicht. Wir können also (4.2.3) genauer als

$$0 = \sum_{k} (-i)\delta(x - x_{k})G(x_{1}, \dots \check{x}_{k} \dots, x_{n}) + \left\langle T\left({}^{``}N_{3}\left[\frac{\delta\Gamma_{eff}}{\delta\varphi(x)}\right] {}^{''}\varphi(x_{1})\dots\varphi(x_{n})e^{i\int\mathcal{L}_{int}} \right) \right\rangle$$
(4.2.4)

schreiben. Dabei sollen die Anführungszeichen "..." andeuten, daß die N_3 -Vorschrift nur für den Vertex $-\frac{\hat{\lambda}}{3!}\varphi^3$, nicht aber für die linearen Anteile gilt.

Um (4.2.4) in funktionale Form zu bringen, drücken wir Greensche Funktionen als Ableitungen nach der Quelle j aus.

$$-i\sum_{k}\delta(x-x_{k})G(x_{1},\ldots\check{x}_{k}\ldots,x_{n}) = -i\sum_{k}\delta(x-x_{k})\frac{\delta}{i\delta j(x_{1})}\ldots\frac{\delta}{i\delta j(x_{k})}\ldots\times$$
$$\times\frac{\delta}{i\delta j(x_{n})}Z\Big|_{j=0}$$
(4.2.5)

und benutzen

$$\delta(x - x_k) = \frac{\delta}{\delta j(x_k)} j(x),$$

so daß sich

$$-i\sum_{k}\delta(x-x_{k})G(x_{1}\ldots\check{x}_{k}\ldots x_{n}) = \frac{\delta}{i\delta j(x_{1})}\ldots\frac{\delta}{i\delta j(x_{n})}(j(x)Z)\Big|_{j=0}$$
(4.2.6)

ergibt. Hiermit erhält (4.2.4) die Form

$$-j(x)Z = \left[\frac{\delta\Gamma_{eff}}{\delta\varphi(x)} \right]_{3} \cdot Z.$$
(4.2.7)

Der Übergang zum Funktional der zusammenhängenden Greenschen Funktionen liefert

$$-j(x) = \left[\frac{\delta\Gamma_{eff}}{\delta\varphi(x)}\right]_{3} Z_{c}, \qquad (4.2.8)$$

die Legendre-Transformation (s. (2.3.14))

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi(x)} = \left[\frac{\delta\Gamma_{eff}}{\delta\varphi(x)} \right]_{3} \cdot \Gamma.$$
(4.2.9)

(4.2.7)-(4.2.9) entsprechen also auf dem Niveau der jeweiligen Greenschen Funktionen der klassischen Feldgleichung. Anwendung des Reduktionsformalismus (Abschnitt 2.4) auf (4.2.7) führt zum Äquivalent der klassischen Feldgleichung als Operatorgleichung.

4.2.2 Bilineare Feldgleichung

Hier handelt es sich um die Analyse des Ausdrucks

 $R\langle T(\varphi(x)(\Box_x + m^2)\varphi(x)\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)e^{i\int \mathcal{L}_{int}})\rangle.$

(Wieder sind alle Größen solche der freien Theorie und die Berechnung soll mit Hilfe der Waldformel (3.2.98) gemäß (4.1.23) erfolgen.) Diagrammatisch ergibt sich analog zu (4.2.1)



und wir müssen wieder den Effekt von $\Box + m^2$ im einzelnen verfolgen. Die Linie L "verschwindet" jeweils und analytisch entstehen die Ausdrücke





Der Subtraktionsgrad, der am Vertex x (zweites Diagramm) $\delta = 4$ war, bleibt $\delta = 4$ auch nach Verschwinden der Linie L, denn der Vertex bleibt Renormierungsteil. Entsprechendes gilt für die bilinearen Vertizes. Damit läßt sich korrekter die Gleichung

$$\langle T(\varphi(x)(\Box + m^2)\varphi(x)\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)e^{i\int\mathcal{L}_{int}}\rangle = -i\sum_k \delta(x - x_k)G(x_1,\dots,x_n) - i\left\langle T\left(N_4\left[-\frac{\tilde{\lambda}}{3!}\varphi^4 + b\partial\varphi\partial\varphi - a\varphi^2\right]\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)e^{i\int\mathcal{L}_{int}}\right)\right\rangle$$
(4.2.11)

angeben. Diese läßt sich sofort umschreiben in

$$0 = -i\sum_{k}\delta(x - x_{k})G(x_{1}\dots x\dots x_{n}) + \left\langle T\left(\left[\varphi\frac{\delta\Gamma_{eff}}{\delta\varphi}\right]_{4}\varphi(x_{1})\dots\varphi(x_{n})e^{i\int\mathcal{L}_{int}}\right)\right\rangle$$

$$(4.2.12)$$

Für die Funktionale ergibt sich also

$$ij\frac{\delta}{\delta j}Z = \left[\varphi\frac{\delta\Gamma_{eff}}{\delta\varphi}\right]_{4} \cdot Z \tag{4.2.13}$$

$$-j\frac{\delta}{\delta j}Z_c = \left[\varphi\frac{\delta\Gamma_{eff}}{\delta\varphi}\right]_4 \cdot Z_c \tag{4.2.14}$$

$$\varphi \frac{\delta}{\delta \varphi} \Gamma = \left[\varphi \frac{\delta \Gamma_{eff}}{\delta \varphi} \right]_4 \cdot \Gamma \tag{4.2.15}$$

Dieses Ergebnis läßt sich ganz offensichtlich verallgemeinern auf *alle linearen* Feldtransformationen $\varphi_k \frac{\delta}{\delta \varphi_{k'}}$ $k \neq k'$. Relevant war ja in der Herleitung nur, daß die Diagrammstruktur nicht tiefgreifend geändert wird. D.h. in diesem Fall, daß die Schleifenzahl gleich geblieben ist. Die obige Herleitung gilt sogar noch für Transformationen vom Typ $\psi \frac{\delta}{\delta \varphi}$ (ψ : Spinor, φ : Skalar), wie sie in der Supersymmetrie auftreten. Hier wird zwar der Subtraktionsgrad geändert ($4 \rightarrow \frac{9}{2}$), aber es müssen keine Wälder umgeordnet werden. Letzteres ist jedoch der Fall, wenn nicht-lineare Feldtransformationen auftreten. Man kann dann auch noch explizite Rechenregeln aufstellen ("anisotrope Normalprodukte"), aber in der Praxis hat sich ein allgemeineres und einfacheres Verfahren bewährt.

4.2.3 Nicht-lineare Feldtransformationen

Gleichung (4.2.15) zeigt deutlich, daß "bilineare Bewegungsgleichungen" die Information enthalten, die man ausnutzen muß, um (klassische) lineare Feldtransformationen auf dem Niveau der quantisierten Theorie zu formulieren. Das entsprechende Problem für eine *nicht-lineare* Transformation

$$\delta\varphi = Q(\varphi) \tag{4.2.16}$$

ist offensichtlich schwieriger zu lösen, denn der Ersatz von φ durch Q erlaubt (bzw. erzwingt) neue Schleifen, also eine nicht-triviale Änderung der Waldstruktur eines Diagramms. Eine Standardmethode, um solche zusammengesetzten Operatoren in die Theorie einzuführen und ihr Auftreten zu steuern, besteht im folgenden. Man geht von dem bisher gegebenen $\Gamma_{eff}(\varphi)$ zu

$$\Gamma_{eff}^{q} = \Gamma_{eff}(\varphi) + N_4[\int qQ]$$
(4.2.17)

über und benutzt Γ_{eff}^{q} zur Konstruktion von Diagrammen. Ganz ähnlich wie die Ableitung nach einer Kopplungskonstanten liefert jetzt die Ableitung nach dem äußeren Feld q (einer Art lokalen Kopplung) die Einsetzung Q:

$$\frac{\delta Z^q}{\delta q(x)} = i[Q(x)]_{\delta} \cdot Z^q \tag{4.2.18}$$

und zwar mit dem Subtraktionsgrad $\delta = 4 - \dim q = \dim Q$ (so wird die Dimension von q gerade gewählt). Entsprechend für die anderen Funktionale

$$\frac{\delta Z_c^q}{\delta q(x)} = [Q(x)]_{\delta} \cdot Z^q \tag{4.2.19}$$

$$\frac{\delta\Gamma^q}{\delta q(x)} = [Q(x)]_{\delta} \cdot \Gamma^q \tag{4.2.20}$$

Sollen diese Einsetzungen (etwa in höheren Ordnungen) korrigiert werden, so addiert man entsprechende Korrekturen zu Γ_{eff}^{q} . Die Analoga zu (4.2.13)-(4.2.15) lassen sich nun in der Form

$$ij(x)\frac{\delta Z^{q}}{\delta q(x)}\Big|_{q=0} = N_{3+\delta}[\hat{Q}(x)] \cdot Z$$
(4.2.21)

$$-j(x)\frac{\delta Z_c^q}{\delta q(x)}\Big|_{q=o} = N_{3+\delta}[\hat{Q}(x)] \cdot Z_c$$
(4.2.22)

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi(x)} \frac{\delta\Gamma^q}{\delta q(x)}\Big|_{q=o} = N_{3+\delta}[\hat{Q}(x)] \cdot \Gamma$$
(4.2.23)

mit
$$\hat{Q}(x) = \frac{\delta \Gamma_{eff}^{q}}{\delta q(x)} \frac{\delta \Gamma_{eff}}{\delta \varphi(x)}\Big|_{q=o} + O(\hbar)$$
 (4.2.24)

herleiten. Die Korrekturen höherer Ordnung zu \hat{Q} rühren gerade von der Nicht-Linearität von Q her. Wichtiger als die genaue Form von \hat{Q} ist die Tatsache, daß die rechten Seiten von (4.2.21)-(4.2.23) *Einsetzungen* von wohl-definierten Subtraktionsgraden sind. Diese Eigenschaft allein reicht für allgemeine Beweise aus. Ebenso bedeutsam ist in der Praxis, daß (4.2.23) *bilinear* in Γ ist. (Das ergibt sich per Legendre-Transformation aus (4.2.22), wobei man sich nur daran zu erinnern hat, daß letztere nur für propagierende Felder auszuführen ist.) Renormierungseigenschaften, die sich ja immer am einfachsten über Γ ausdrücken lassen, sind also im Fall nicht-linearer Feldtransformationen sicher keine völlig triviale Angelegenheit. Das wichtigste Beispiel, die BRS-Transformationen, werden wir in Abschnitt 7 abhandeln.

4.3 Symmetrien. Ward-Identitäten

Symmetrien spielen in der Physik der Elementarteilchen eine ganz wesentliche Rolle. Die Lorentz- (genauer: Poincaré-) Invarianz hat gar den Status eines Axioms erhalten: wir betrachten überhaupt nur solche Modelle als Kandidaten für Theorien, die sie erfüllen. Andere Transformationen, die die Raum-Zeit miteinbeziehen ("geometrische", "äußere") Symmetrien werden wir im Abschnitt 4.5.2 besprechen. Hier geht es zunächst um "innere" Symmetrien, das sind solche, die nur Felder an ein und demselben Raum-Zeit-Punkt miteinander verknüpfen.

4.3.1 *O*(3)-Symmetrie

Wir wählen drei skalare Felder φ_i i = 1, 2, 3, ordnen sie in einem Multiplett

$$\underline{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} \tag{4.3.1}$$

an, das sich gemäß

$$\delta_i \varphi_j = \varepsilon_{ijk} \varphi_k \tag{4.3.2}$$

in sich transformiert. Hierbei ist

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{ijk} \quad geradePermutation} \\ -1 & \text{ijk} \quad ungeradePermutation} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
(4.3.3)

Die allgemeinste Wirkung (mit Dimension ≤ 4), die invariant unter (4.3.2) ist, hat die Form

$$\Gamma_{cl} = \int \left(-\frac{1}{2} \underline{\varphi} (\Box + m^2) \underline{\varphi} - \frac{\lambda}{4!} (\underline{\varphi}^2)^2 \right).$$
(4.3.4)

Da wir Γ_{cl} als die niedrigste Ordnung der störungstheoretischen Entwicklung des Funktionals Γ der Vertexfunktionen auffassen wollen (vergl. Abschnitt 2.3) und an den Symmetrieeigenschaften von Γ interessiert sind, drücken wir die Symmetrie auf Γ_{cl} aus. Das geschieht mit Hilfe von funktionalen Differentialoperatoren und führt zur sogenannten Ward-Identität (für die betrachtete Symmetrie)

$$\mathbf{W}_{k}\Gamma_{cl} \equiv -i \int dx \,\,\varphi_{l} \,\,\varepsilon_{lkm} \frac{\delta\Gamma_{cl}}{\delta\varphi_{m}} = 0 \tag{4.3.5}$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß diese Differentialoperatoren dieselbe Algebra erfüllen, wie die Transformationen $\delta_i \varphi_j$:

$$[\mathbf{W}_k, \mathbf{W}_l] = i \ \varepsilon_{klm} \ \mathbf{W}_m. \tag{4.3.6}$$

Ebenso ist klar, daß es eine sinnvolle Frage ist, wie \mathbf{W}_k auf dem gesamten Vertexfunktional Γ operiert. Die Antwort hierauf gibt das Wirkungsprinzip (4.2.15).

$$\mathbf{W}_k \Gamma = [\mathbf{W}_k \Gamma_{eff}]_4 \cdot \Gamma \tag{4.3.7}$$

4.3. SYMMETRIEN. WARD-IDENTITÄTEN

Wählen wir für Γ_{eff} die Invariante

$$\Gamma_{eff} = \left[\int \left(-\frac{1}{2} \underline{\varphi} (1+z) \Box \underline{\varphi} - (m^2+a)) \underline{\varphi}^2 - \frac{\hat{\lambda}}{4!} (\underline{\varphi}^2)^2 \right) \right]_4, \tag{4.3.8}$$

dann folgt sofort

$$\mathbf{W}_k \Gamma = 0 \tag{4.3.9}$$

und wir wissen, daß die Vertexfunktionen, die wir mit Hilfe von (4.3.8) gemäß Gell-Mann-Low-(2.2.33) und Waldformel (3.2.98) berechnen, invariant sind unter den O(3)-Transformationen (4.3.5) d.h. (4.3.2). Hierbei ist genauer

$$\Gamma_{\rm int} = \Gamma_{eff} - \Gamma_o = \left[\int \left(-\frac{1}{2} \underline{\varphi} (z\Box + a) \underline{\varphi} - \frac{\hat{\lambda}}{4!} (\underline{\varphi}^2)^2 \right) \right]_4 \tag{4.3.10}$$

Die Impulssubtraktionen, die die Waldformel vorschreibt, stören also die Symmetrie *nicht*. Γ_{eff} ist im naiven Sinne invariant, und liefert ein invariantes Vertexfunktional – man sagt "das Renormierungsschema ist invariant in bezug auf die O(3)-Symmetrie". Die Potenzreihen $z = z(\lambda), a = a(\lambda), \hat{\lambda} = \lambda + O(\lambda^2)$ werden fixiert durch Normierungsbedingungen, z.B.

$$\Gamma_{\varphi_{1}\varphi_{1}}(p^{2} = m^{2}) = 0$$

$$\partial_{p^{2}}\Gamma_{\varphi_{1}\varphi_{1}}(p^{2} = \kappa^{2}) = 1$$

$$\Gamma_{\varphi_{1}\varphi_{1}\varphi_{1}\varphi_{1}}|_{p=p_{sym}} = -\lambda$$
(4.3.11)

Der symmetrische Punkt p_{sym} ist durch die Bedingungen

$$p_i^2 = \kappa^2, p_i p_j = \frac{4}{3}\kappa^2 \quad \text{für } i \neq j$$
 (4.3.12)

festgelegt.

Nun sind nicht alle Symmetrien naiv verträglich mit Impulssubtraktionen, insbesondere werden nicht-lineare Transformationen schwerlich im obigen Sinne naiv realisierbar sein. Daher wollen wir bereits am gegenwärtigen einfachsten Beispiel eine allgemeinere Technik vorführen, die in allen bekannten Fällen zum Erfolg führt.

Wir entnehmen dem Wirkungsprinzip (4.2.15) nur die Information, die auch der nicht-lineare Fall enthält, (4.2.23), nämlich, daß die Anwendung des Ward-Identitäts-Operators \mathbf{W}_k auf Γ eine Einsetzung mit bekanntem Subtraktionsgrad liefert (hier 4):

$$\mathbf{W}_k \Gamma = N_4[\Delta_k] \cdot \Gamma \tag{4.3.13}$$

Da Γ_{cl} invariant ist, ist die rechte Seite von (4.3.13) sicher von der Ordnung \hbar . Für 1PI Diagramme mit einer Einsetzung gilt aber

$$\Delta_k \cdot \Gamma = \Delta_k + O(\hbar \Delta_k)$$

$$\stackrel{\circ}{=} \text{triviales Diagramm} + O(\hbar \Delta_k)$$
(4.3.14)

(man vergleiche mit (3.2.105)). D.h. für die Ward-Identität (4.3.13)

$$\mathbf{W}_k \Gamma = \Delta_k + O(\hbar \Delta_k) \tag{4.3.15}$$

Wenden wir hierauf nun \mathbf{W}_l an und subtrahieren das Ergebnis von dem mit $l \leftrightarrow k$ vertauschten, so gelangen wir zu

$$[\mathbf{W}_k, \mathbf{W}_l]\Gamma = \mathbf{W}_k \Delta_l - \mathbf{W}_l \Delta_k + O(\hbar\Delta)$$
(4.3.16)

Für die linke Seite können wir aber die Algebra (4.3.6) benutzen, d.h.

$$i\varepsilon_{klm}\Delta_m + O(\hbar\Delta_m) = \mathbf{W}_k\Delta_l - \mathbf{W}_l\Delta_h + O(\hbar\Delta)$$
 (4.3.17)

In der Ordnung \hbar erhalten wir also eine Konsistenzbedingung, die die klassischen integrierten Feldpolynome Δ_k der Dimension vier erfüllen müssen:

$$\mathbf{W}_k \Delta_l - \mathbf{W}_l \Delta_k = i \,\varepsilon_{klm} \Delta_m \tag{4.3.18}$$

Bevor wir diese Relation weiter untersuchen, stellen wir fest, daß aus dem quantenfeldtheoretischen Problem, zu untersuchen, ob (4.3.13) die Lösung (4.3.9) hat, ein rein klassisches gefolgt ist, nämlich die Bedingung (4.3.18). Welche Δ_k erfüllen diese Relationen? Wir multiplizieren mit ε_{jkl} und summieren über k, l:

$$\Delta_j = -i \,\varepsilon_{jkl} \mathbf{W}_k \Delta_l \tag{4.3.19}$$

Hier setzen wir für Δ_l noch einmal (4.3.19) selbst ein:

$$\Delta_{j} = -i \varepsilon_{jkl} \mathbf{W}_{k} (-i\varepsilon_{lmn} \mathbf{W}_{m} \Delta_{n})$$

= $- (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) \mathbf{W}_{k} \mathbf{W}_{m} \Delta_{n}$
= $- \mathbf{W}_{n} \mathbf{W}_{j} \Delta_{n} + \mathbf{W} \cdot \mathbf{W} \Delta_{j}$ (4.3.20)

 $\underline{\mathbf{W}} \cdot \underline{\mathbf{W}}$ ist aber der Casimir-Operator der Gruppe O(3)!

$$(1 - \underline{\mathbf{W}} \cdot \underline{\mathbf{W}})\Delta_j = -\mathbf{W}_n \mathbf{W}_j \Delta_n$$

= $-\mathbf{W}_j \mathbf{W}_n \Delta_n - i\varepsilon_{njl} \mathbf{W}_l \Delta_n = \mathbf{W}_j (-\mathbf{W}_n \Delta_n) + \Delta_j$ (4.3.21)

Hiermit folgt

$$\underline{\mathbf{W}} \cdot \underline{\mathbf{W}} \Delta_j = \mathbf{W}_j(\mathbf{W}_n \Delta_n) \tag{4.3.22}$$

Da der Casimir-Operator ein Inverses hat und mit \mathbf{W}_i vertauscht, ergibt sich

$$\Delta_j = \mathbf{W}_j \left(\frac{1}{\underline{\mathbf{W}} \cdot \underline{\mathbf{W}}} \mathbf{W}_n \Delta_n \right) = \mathbf{W}_j \hat{\Delta}$$
(4.3.23)

D.h. Δ_j ist die Variation einer lokalen Einsetzung

$$\Delta_j = \mathbf{W}_j \hat{\Delta} \tag{4.3.24}$$

("lokal" heißt hier: $\hat{\Delta} = \int dx P(\underline{\varphi}(x))$, P: Polynom in den Feldern und Ableitungen der Felder – an einem Punkt x).

Hiermit können wir die Ward-Identität (4.3.15) in der Ordnung \hbar erfüllen, indem wir Γ_{eff} und damit Γ um eine lokale Einsetzung der Dimension vier abändern:

$$\Gamma'_{eff} = \Gamma_{eff} - \hat{\Delta} \tag{4.3.25}$$

$$\Rightarrow \Gamma' = \Gamma - \hat{\Delta} + O(\hbar \hat{\Delta}) \tag{4.3.26}$$

$$\mathbf{W}_{k}\Gamma' = \mathbf{W}_{k}\Gamma - \mathbf{W}_{k}\hat{\Delta} + O(\hbar\hat{\Delta}) \tag{4.3.27}$$

denn $\hat{\Delta}$ ist ja bereits von Ordnung \hbar ; also folgt

$$\mathbf{W}_{k}\Gamma' = \Delta_{k} - \mathbf{W}_{k}\dot{\Delta} + O(\hbar\dot{\Delta})$$

$$\mathbf{W}_{k}\Gamma' = O(\hbar^{2})$$

(4.3.28)

In der Ordnung \hbar gilt die Ward-Identität! Nun berechnen wir Γ' in der Ordnung \hbar^2 mit Γ'_{eff} , finden eine Verletzung, die lokal ist, können wieder die Algebra anwenden usw. D.h. rekursiv läßt sich durch Addition von geeigneten Korrekturen $\hat{\Delta}$ zu Γ_{eff} die Ward-Identität (4.3.9) für alle Ordnungen erfüllen.

Die soeben beschriebene Methode fußt also auf Subtraktionsgraden und Lokalität und benutzt dann nur noch algebraische Hilfsmittel, aber nicht etwa besondere analytische Eigenschaften des Subtraktionsschemas. Da das Wirkungsprinzip als fundamental anzusehen ist, ist also auch diese *algebraische* Methode von grundlegender Bedeutung. (Sie ist von Becchi, Rouet und Stora im Zusammenhang mit Eichtheorien entwickelt worden; vgl. Kap. 7.)

4.3.2 Ein axiales U(1)-Modell: Das σ -Modell

Wir geben uns ein skalares Feld A, ein pseudoskalares Feld B und einen Dirac-Spinor ψ vor. Als Symmetrietransformationen fordern wir

$$\delta A = B \qquad \delta \psi = \frac{1}{2} i \gamma_5 \psi \qquad (4.3.29)$$

$$\delta B = -A \qquad \delta \bar{\psi} = \frac{1}{2} i \bar{\psi} \gamma_5$$

und die Parität P:

$$P: \quad A(x) \to A(x^{P}) \qquad \psi(x) \to \gamma^{o}\psi(x^{P}) \\ B(x) \to -B(x^{P}) \qquad \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}(x^{P})\gamma^{o} \qquad (4.3.30)$$

Die allgemeinste invariante klassische Wirkung der Dimension ≤ 4 lautet

$$\Gamma_{cl} = \int -\frac{1}{2} \underline{\varphi} (\Box + m^2) \underline{\varphi} - \frac{\lambda}{4!} (\underline{\varphi}^2)^2 + \bar{\psi} i \partial \!\!\!/ \psi + g \bar{\psi} (A + i \gamma_5 B) \psi$$

$$(4.3.31)$$

Wir benutzen ein γ_5 mit den Eigenschaften

$$\gamma_5^{\dagger} = \gamma_5 \qquad \gamma_5^2 = \mathbf{1} \tag{4.3.32}$$

und $\underline{\varphi}^2 \equiv A^2 + B^2.$ Γ_{cl} gehorcht der Ward-Identität

$$\mathbf{W}\Gamma_{cl} \equiv -i \int \left(B \frac{\delta}{\delta A} - A \frac{\delta}{\delta B} + \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma_5 \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}} + \frac{\delta}{\delta \psi} \frac{i}{2} \gamma_5 \psi \right) \Gamma_{cl} = 0.$$
(4.3.33)

Es ist eine Konsequenz der Symmetrie (4.3.29), daß das Feld ψ masselos ist; ein Massenterm wäre nicht invariant:

$$\mathcal{L}_M = M\bar{\psi}\psi \tag{4.3.34}$$

$$\mathcal{L}_M = iM\bar{\psi}\psi \tag{4.3.34}$$

$$(4.3.35)$$

$$\delta \mathcal{L}_M = i M \bar{\psi} \gamma_5 \psi \tag{4.3.35}$$

Um diese Theorie zu quantisieren, d.h. ein Vertexfunktional Γ in allen Ordnungen zu konstruieren, gibt das im Kap. 3 beschriebene Impulssubtraktionsverfahren nur die Möglichkeit, für das masselose Feld ψ doch eine Masse, die Hilfsmasse $M \to M(s-1)$, einzuführen, andernfalls würden die Ultraviolettsubtraktionen zu Infrarotdivergenzen führen. (Vergl. Abschnitt 3.2.5.) Damit gerät das Renormierungsverfahren aber in Konflikt mit der Symmetrie (4.3.29), die die Masselosigkeit von ψ nach sich zieht. Da an der Stelle s = 1 die Masse von ψ verschwindet, sollte sich die masselose Theorie und damit die Symmetrie für s = 1 dennoch realisieren lassen. Wie das vor sich geht, wollen wir jetzt darstellen.

Als Γ_{eff} wählen wir zunächst einmal

$$\Gamma_{eff} = \Gamma_{eff}^{inv} + \Gamma_M$$

$$\Gamma_{eff}^{inv} = \left[\int \left(-\frac{1}{2} \underline{\varphi}((1+z_B)\Box + m^2 + a)\underline{\varphi} - \frac{\hat{\lambda}}{4!} (\underline{\varphi}^2)^2 + \bar{\psi}i(1+z_F)\partial\!\!\!/\psi + \hat{g}\bar{\psi}(A+i\gamma_5 B)\psi \right) \right]_4^4$$

$$\Gamma_M = \int [M(s-1)\bar{\psi}\psi]_4^4$$
(4.3.36)

4.3. SYMMETRIEN. WARD-IDENTITÄTEN

Das Wirkungsprinzip (4.2.15) führt mit (4.3.35) zu

$$\mathbf{W}\Gamma = \int [iM(s-1)\bar{\psi}\gamma_5\psi]_4^4 \cdot \Gamma.$$
(4.3.37)

Da (s - 1) von den Subtraktionen betroffen ist (vergl. (3.2.124)), können wir nicht einfach im Normalprodukt $[\ldots (s-1)\ldots]$ an die Stelle s = 1 gehen, sondern müssen mit Hilfe einer algebraischen Identität den Faktor (s - 1) "extrahieren". Sie lautet hier

$$M(s-1)\left[\int \bar{\psi}\gamma_5\psi\right]_3^3 \cdot \Gamma = (1+q)\left[M(s-1)\int \bar{\psi}\gamma_5\psi\right]_4^4 \cdot \Gamma + \sum_i u_i'\int [Q_i]_4^4\dot{\Gamma}$$
(4.3.38)

wobei die Monome Q_i eine Basis von Termen aufspannen, die mit $\rho = \delta = 4$ verträglich sind und negative Eigenparität haben, während q und u'_i Koeffizienten der Ordnung mindestens \hbar sind. Denn Paritätsinvarianz dürfen wir voraussetzen. Wie in Abschnitt 3.2.5 dargelegt, ordnen wir den massiven Feldern A, B die UV-Dimension 1, aber die IR-Dimension 2 zu; dem masselosen Feld ψ hingegen $r(\psi) = d(\psi) = \frac{3}{2}$. "Verträglich mit $\rho_i = \delta_i = 4$ " sind alle Monome Q_i mit $r(Q_i) \geq 4, d(Q_i) \leq 4$. Damit umfaßt die Liste der $\int Q_i$:

$$\int \bar{\psi} B\psi, i\bar{\psi}\gamma_5 A\psi, \bar{\psi}\partial\gamma_5\psi, \partial A\partial B, A^3 B, AB^3, AB$$
(4.3.39)

(Explizite Faktoren (s - 1) haben wir nicht zugelassen, denn sie könnten (u.U. mit einer anderen Identität) beseitigt werden und wir sind zum Schluß nur an der Identität für s = 1 interessiert.)

Wir ordnen sie so um, daß Variationen ersichtlich sind:

$$\bar{\psi}(B + i\gamma_5 A)\psi = \delta(\frac{1}{2}\bar{\psi}A\psi)$$

$$\partial A\partial B = \delta(\frac{1}{2}\partial A\partial A) \qquad AB^3 = \delta(-\frac{1}{4}B^4) \qquad (4.3.40)$$

$$A^3B = \delta(\frac{1}{4}A^4) \qquad AB = \delta(\frac{1}{2}A^2)$$

Die verbleibenden Terme sind keine Variationen, aber invariant unter (4.3.29):

$$i\bar{\psi}\partial\!\!\!/\gamma_5\psi, \bar{\psi}(B - i\gamma_5 A)\psi \tag{4.3.41}$$

Wir setzen jetzt (4.3.38) in (4.3.37) ein, gehen an die Stelle s = 1 und absorbieren

122 KAPITEL 4. DAS WIRKUNGSPRINZIP UND SEINE ANWENDUNGEN

die Faktoren zund $(1+q)^{-1}$ in $u_i^\prime.$ Die Ward-Identität lautet dann

$$\mathbf{W}\Gamma_{|_{s=1}} = -i \int \left[u_o i \bar{\psi} \partial \gamma_5 \psi + u'_o \bar{\psi} (B - i \gamma_5 A) \psi \right]_{s=1}^{4} + u_1 \partial A \partial B + u_2 A B + u_3 A^3 B + u_4 A B^3 + u_5 \bar{\psi} (B - i \gamma_5 A) \psi_4 \right]_4^4 \cdot \Gamma_{|_{s=1}}$$

$$(4.3.42)$$

Wir wollen zeigen, daß $u_o = u'_o = 0$ ist. Hierzu könnten wir (4.3.38) heranziehen oder eben direkt (4.3.42). Letzteres ist einfacher. Um u_o zu bestimmen, differenzieren wir (4.3.42) nach ψ_{β} und $\bar{\psi}_{\alpha}$ an der Stelle verschwindender Felder:

$$\frac{\vec{\delta}}{\delta\bar{\psi}_{\alpha}}\mathbf{W}\Gamma\frac{\vec{\delta}}{\delta\psi_{\beta}}\Big|_{\substack{\varphi=0\\\psi=0}} \equiv (-i)i\Big((\gamma_{5})_{\alpha\delta}\frac{\vec{\delta}}{\delta\bar{\psi}_{\delta}(x)}\Gamma\frac{\vec{\delta}}{\delta\psi_{\beta}(y)} + \frac{\vec{\delta}}{\delta\bar{\psi}_{\alpha}(x)}\Gamma\frac{\vec{\delta}}{\delta\psi_{\beta}(y)}(\gamma_{5})_{\delta p}\Big) \\
= u_{o}\,i(\gamma^{\mu}\gamma_{5})_{\alpha\beta}\partial_{\mu}\delta(x-y) + O(u\hbar)$$
(4.3.43)

Fourier transformation und Differentiation nach p^{λ} führt zu

$$\partial_{p^{\lambda}} \Big(\gamma_{5\alpha\delta} \Gamma_{\psi_{\delta}\bar{\psi}_{\beta}}(p) + \Gamma_{\psi_{\alpha}\bar{\psi}_{\delta}}(p) \gamma_{5}\delta\beta \Big) = u_{o}(\gamma_{\lambda}\gamma_{5})_{\alpha\beta} + O(u\hbar)$$
(4.3.44)

Multiplikation mit γ^{λ} von links, γ_{5} von rechts zu

$$\gamma^{\lambda}\partial_{p^{\lambda}}(\gamma_{5}\Gamma_{\psi\bar{\psi}}\gamma_{5}+\Gamma_{\psi\bar{\psi}}) = 4u_{o} + O(u\hbar)$$
(4.3.45)

Wegen Lorentzinvarianz und Paritätserhaltung gilt

$$\Gamma_{\psi\bar{\psi}} = \gamma^{\mu} p_{\mu} \Gamma^{(2)}_{\psi\bar{\psi}}(p^2) + \mathbf{1} \hat{\Gamma}^{(2)}_{\psi\bar{\psi}}(p^2).$$
(4.3.46)

Die Subtraktion für $\Gamma_{\psi\bar\psi}$ werden gemäß $\delta=\rho=1$ ausgeführt, also gilt

$$\hat{\Gamma}_{\psi\bar{\psi}}^{(2)}\Big|_{\substack{p=0\\s=1}} = O(\hbar), \tag{4.3.47}$$

d.h. ψ ist masselos. Als Folge der Lorentzinvarianz gilt dann auch

$$\partial_p \hat{\Gamma}^{(2)}_{\psi\bar{\psi}}(p^2)\Big|_{\substack{p=0\\s=1}} = 0.$$
(4.3.48)

Wegen

$$\gamma_5 \gamma^{\mu} p_{\mu} \gamma_5 \Gamma^{(2)}_{\psi\bar{\psi}}(p^2) = -\gamma^{\mu} p_{\mu} \Gamma^{(2)}_{\psi\bar{\psi}}(p^2)$$
(4.3.49)

folgt eingesetzt in (4.3.45)

$$0 = 4u_o + O(u\hbar)$$
 (4.3.50)

Um u_o' zu bestimmen, "testen" wir (4.3.42) mit Ableitungen nach $B\bar\psi\psi$ bzw. $A\bar\psi\psi.$ Das liefert

$$\frac{\delta^{3}}{\delta B \delta \bar{\psi} \delta \psi} \mathbf{W} \Gamma \equiv -i(i) \int \left(\gamma_{5} \frac{\delta}{\delta B \delta \bar{\psi}} \Gamma \frac{\delta}{\delta \psi} \Gamma \frac{\delta}{\delta \psi} \Gamma \frac{\delta}{\delta W} \Gamma \frac{\delta}{\delta \psi} \gamma_{5} - i \frac{\delta}{\delta A \delta \bar{\psi}} \Gamma \frac{\delta}{\delta \psi} \right)$$

$$= (u'_{o} + u_{5}) \int dz \delta(x_{1} - z) \delta(x_{2} - z) \delta(x_{3} - z) + O(u\hbar)$$

$$\frac{\delta^{3}}{\delta A \delta \bar{\psi} \delta \psi} \mathbf{W} \Gamma \equiv -i(i) \int \left(\gamma_{5} \frac{\delta}{\delta A \delta \bar{\psi}} \Gamma \frac{\delta}{\delta \psi} \Gamma \frac{\delta}{\delta \psi} \Gamma \frac{\delta}{\delta \psi} \Gamma \frac{\delta}{\delta \psi} \gamma_{5} + i \frac{\delta}{\delta B \delta \bar{\psi}} \Gamma \frac{\delta}{\delta \psi} \right)$$

$$= (u'_{o} i \gamma_{5} + u_{5}(-i\gamma_{5})) \int dz \delta(x_{1} - z) \delta(x_{2} - z) \delta(x_{3} - z) + O(u\hbar)$$

$$(4.3.52)$$

Fouriertransformation führt am Punktp=0,s=1zu

$$\frac{1}{2} (\gamma_5 \Gamma_{B\psi\bar{\psi}} + \Gamma_{B\psi\bar{\psi}}\gamma_5 - 2i\Gamma_{A\psi\bar{\psi}}) \Big|_{\substack{p=0\\s=1}} = u'_o + u_5 + O(u\hbar)$$
(4.3.53)

$$-\frac{1}{2}(\gamma_5\Gamma_{A\psi\bar{\psi}} + \Gamma_{A\psi\bar{\psi}}\gamma_5 + 2i\Gamma_{B\psi\bar{\psi}})\Big|_{\substack{p=0\\s=1}} = (u'_o - u_5)i\gamma_5 + O(u\hbar)$$
(4.3.54)

Linearkombination von (4.3.53) und (4.3.54) und

$$Tr(\gamma_5 \Gamma_{B\psi\bar{\psi}}) = Tr(\Gamma_{B\psi\bar{\psi}}\gamma_5)$$

$$Tr(\gamma_5 \Gamma_{A\psi\bar{\psi}}) = Tr(\Gamma_{A\psi\bar{\psi}}\gamma_5)$$
(4.3.55)

zu

$$0 = 2u'_o + O(u\hbar) \tag{4.3.56}$$

$$u_5 = 2(\Gamma_{B\psi\bar{\psi}}\gamma_5 + \Gamma_{A\psi\bar{\psi}})\Big|_{\substack{p=0\\s=1}} + O(u\hbar)$$

$$(4.3.57)$$

Ganz analog zum Vorgehen im letzten Abschnitt ändern wir jetzt Ordnung für Ordnung Γ_{eff} ab. Wir addieren zu Γ_{eff} (4.3.36) einen nicht-invarianten Anteil Γ_{eff}^{var}

$$\Gamma_{eff} = \Gamma_{eff}^{inv} + \Gamma_{eff}^{var} + \Gamma_M$$
(4.3.58)
$$\Gamma_{eff}^{var} = \left[\int \left(\frac{1}{2} a_1 \partial A \partial A + \frac{1}{2} a_2 A^2 + \frac{1}{4} a_3 A^4 - \frac{1}{4} a_4 B^4 + a_5 \bar{\psi} A \psi \right) \right]_4^4,$$
(4.3.59)

dessen Koeffizienten $a_i = O(\hbar)$ wir Odnung für Ordnung so anpassen, daß sie die Brechungsbeiträge u_iQ_i in (4.3.42) kompensieren. In der Ordnung \hbar^1 z.B. folgt dann aus (4.3.50) bzw. (4.3.56)

$$\begin{array}{l}
0 = 4u_o + O(\hbar u_o, \hbar u'_o) \\
0 = 2u'_o + O(\hbar u_o, \hbar u'_o)
\end{array}$$
(4.3.60)

d.h.

$$u_o^{(1)} = u_o^{\prime(1)} = 0. (4.3.61)$$

In der nächsten Ordnung ist die Brechung wieder lokal, wir absorbieren wieder über Γ_{eff}^{var} , was absorbierbar ist, verbleiben mit $u_o^{(2)} = u_o^{\prime(2)} = 0$ und können so rekursiv in allen Ordnungen die Ward-Identität

$$\mathbf{W}\Gamma|_{s=1} = 0 \tag{4.3.62}$$

erfüllen.

Die Koeffizienten $z_B, z_F, a, \hat{\lambda}, \hat{g}$ aus Γ_{eff}^{inv} werden durch Normierungsbedingungen festgelegt. Eine mögliche Wahl ist die folgende:

$$\Gamma_{AA}(p^2 = m^2)|_{s=1} = 0 \rightarrow \text{ fixiert} \qquad a \partial_{p^2}\Gamma_{AA}(p^2 = -\kappa^2)|_{s=1} = 1 \rightarrow '' \qquad z_B \Gamma_{AAAA}(p = p_{sym})|_{s=1} = -\lambda \rightarrow '' \qquad \hat{\lambda}$$

$$\begin{array}{ccc} \langle 4.3.63 \rangle \\ \partial_p \Gamma_{\psi\bar{\psi}}(\not{p} = \kappa)|_{s=1} = 1 \rightarrow '' \qquad z_F \\ \Gamma_{\psi A\bar{\psi}}(p = p_{sym})|_{s=1} = g \rightarrow '' \qquad \hat{g} \end{array}$$

$$(4.3.63)$$

Die Masselosigkeit von ψ ist gewährleistet durch das Subtraktionsschema:

$$\Gamma_{\psi\bar{\psi}}(p=0,s=1) = 0 \tag{4.3.64}$$

denn die 2-Pkt.-Funktion hat $\rho = \delta = 1$ (vergl. (3.2.124)).

Wir können diese Ergebnisse folgendermaßen zusammenfassen: geben wir die Multipletts der Symmetrie vor, (4.3.29), postulieren dann die Ward-Identität (4.3.33) und die Normierungsbedingungen (4.3.63), dann ist Γ_{eff} und damit Γ eindeutig fixiert.

4.3.3 Die Ward-Identität in der QED

In den beiden vorangegangenen Abschnitten haben wir vorgeführt, daß eine Theorie durch Vorgabe der Symmetrie (in Form von Multipletts und der Ward-Identität) und der Normierungsbedingungen eindeutig definiert ist. In diesem Sinn wollen wir jetzt auch die Quanten-<u>E</u>lektro-<u>D</u>ynamik konstruieren. Als Felder enthält die Theorie ein Vektorfeld A_{μ} und ein (Dirac-) Spinorfeld ψ . Als Symmetrie postulieren wir die lokale Eichinvarianz

$$\delta A_{\mu} = \partial_{\mu} \omega(x) \qquad \delta \psi = i e \omega \psi \delta \bar{\psi} = -i e \omega \bar{\psi} \qquad (4.3.65)$$

und die Parität P.

$$P: \quad \psi(x) \quad \to \quad \gamma^0 \qquad \psi(x^P)$$

$$A_o(x) \quad \to \qquad A_o(x^P) \qquad x^P = (x_o, -\underline{x}) \quad (4.3.66)$$

$$A_i(x) \quad \to \quad - \quad A_i(x^P)$$

Die invariante klassische Wirkung (der Dimension ≤ 4) lautet

$$\Gamma_{cl} = \int \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma^{\mu} D_{\mu} - M) \psi \right)$$
(4.3.67)

 mit

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu}A_{\mu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$$
$$D_{\mu} \equiv \partial_{\mu} - ieA_{\mu}.$$

Diese Wirkung ist auch invariant unter Ladungskonjugation

$$C : A_{\mu}(x) \to -A_{\mu}(x)$$

$$\psi(x) \to C\bar{\psi}^{T}(x) \qquad (4.3.68)$$

 $(C=i\gamma^o\gamma^2$ in der Standard
darstellung der Dirac-Matrizen

$$\gamma^{o} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0\\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^{i} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{i}\\ -\sigma^{i} & 0 \end{pmatrix}$$
(4.3.69)

 σ^i sind die Pauli-Matrizen, i = 1, 2, 3.)

Die Invarianz der klassischen Wirkung (4.3.67) unter (4.3.65) läßt sich durch die Ward-Identität

$$w(x)\Gamma \equiv \frac{\delta}{\delta\omega(x)} \int \left(\partial_{\mu}\omega\frac{\delta}{\delta A_{\mu}} - ie\omega\bar{\psi}\frac{\vec{\delta}}{\delta\bar{\psi}} + \frac{\vec{\delta}}{\delta\psi}\psi ie\omega\right)\Gamma_{cl} = 0 \qquad (4.3.70)$$

ausdrücken.

$$w(x) \equiv -\partial_{\mu} \frac{\delta}{\delta A_{\mu}} - i e \bar{\psi} \frac{\vec{\delta}}{\delta \bar{\psi}} + \frac{\vec{\delta}}{\delta \psi} \psi i e \qquad (4.3.71)$$

heißt lokaler Ward-Identitätsoperator; (4.3.70) lokale Ward-Identität – im Gegensatz zum Fall $\omega = const$, in dem nur die Variation der Spinoren beiträgt und der die globale oder starre Symmetrie ausdrückt (vergl. (4.3.5)).

Schon für die freie Theorie ist klar, daß man die Eichinvarianz brechen muß, weil sich sonst der bilineare Anteil in A nicht invertieren läßt. (S. Abschn. 1.3.)

Wir addieren zu (4.3.67) einen eichfixierenden Term und der Vollständigkeit halber auch einen Massenterm:

$$\Gamma_{\rm g.f.} = \int \left(-\frac{1}{2\alpha} (\partial^{\mu} A_{\mu})^2 + \frac{1}{2} m^2 A^{\mu} A_{\mu} \right)$$
(4.3.72)

Für

$$\Gamma = \Gamma_{cl} + \Gamma_{g.f.} \tag{4.3.73}$$

lautet die lokale Ward-Identität dann

$$w(x)\Gamma = -\frac{1}{\alpha}(\Box + \alpha m^2)\partial A.$$
(4.3.74)

Ehe wir daran gehen, die Ward-Identität in höheren Ordnungen der Störungstheorie zu beweisen, wollen wir uns mit einigen ihrer Konsequenzen vertraut machen. Dazu betrachten wir Ableitungen nach den Feldern A, und $\psi(\bar{\psi})$, deren Anzahlen wir n_A und $n_{\psi}(n_{\bar{\psi}})$ nennen

$$n_{A} = 1, n_{\psi} = n_{\bar{\psi}} = 0$$

$$- \partial_{x}^{\mu} \frac{\delta^{2} \Gamma}{\delta A^{\mu_{1}}(x_{1}) \delta A^{\mu}(x)} \Big|_{\substack{A=0\\\psi=\bar{\psi}=0}} = -\frac{1}{\alpha} (\Box + \alpha m^{2}) \partial_{x}^{\mu} \delta(x - x_{1})$$
(4.3.75)

Nach Fouriertransformation ergibt sich

$$p^{\mu}\tilde{\Gamma}_{\mu_{1}\mu}(-p,p) = -\frac{1}{\alpha}(p^{2} - \alpha m^{2})p_{\mu_{1}}$$
(4.3.76)

$$n_A = 2, n_{\psi} = n_{\bar{\psi}} = 0$$

- $\partial_x^{\mu} \Gamma_{\mu_2 \mu_1 \mu}(x_2, x_1, x) = 0$ (4.3.77)

oder:

$$p^{\mu}\tilde{\Gamma}_{\mu_{2}\mu_{1}\mu}(p_{2},p_{1},p) = 0 \qquad p + p_{1} + p_{2} = 0 \qquad (4.3.78)$$

Analog für beliebiges $n_A \ge 2, n_{\psi} = n_{\bar{\psi}} = 0$

$$p^{\mu}\tilde{\Gamma}_{\mu_{n_{A}}\mu_{n_{A}-1}...\mu_{1}\mu} = 0 \qquad p + \sum_{i=1}^{n_{A}} p_{1} = 0$$
 (4.3.79)

$$n_A = 0, n_{\psi} = n_{\bar{\psi}} = 1$$

$$-ie\delta(x-y)\Gamma_{\psi\bar{\psi}}(x,z) + ie\Gamma_{\psi\bar{\psi}}(y,x)\delta(x-z) = \partial_x^{\mu}\Gamma_{\mu\psi\bar{\psi}}(x,y,z)$$
(4.3.80)

4.3. SYMMETRIEN. WARD-IDENTITÄTEN

Nach Fouriertransformation $(-x + y \simeq q_1, z - x \simeq q_2)$

$$e \tilde{\Gamma}_{\psi\bar{\psi}}(-q_2, q_2) - e \tilde{\Gamma}_{\psi\bar{\psi}}(q_1, -q_1) = p^{\mu}\Gamma_{\mu\psi\bar{\psi}}(p, q_1, q_2)$$

$$p + q_1 + q_2 = 0$$
(4.3.81)

Die Identitäten (4.3.76, 4.3.78, 4.3.79, 4.3.81) sind die ursprünglichen Ward-Identitäten, von denen alle anderen ihren Namen geerbt haben. In der QED drücken sie aus, wie der longitudinale Anteil des Photons mit anderen Vertexfunktionen zusammenhängt. Dies ist eben vorgegeben durch die Verletzung der naiven Eichinvarianz. In den Verallgemeinerungen z.B. ((4.3.9), (4.3.62)) sagen sie aus, wie die jeweiligen Symmetrien verschiedene Vertexfunktionen miteinander in Verbindung setzen.

Um nun höhere Ordnungen zu berechnen und die zugehörige Form der Ward-Identität herzuleiten, müssen wir uns das Subtraktionsschema vorgeben. Gemäß der in diesen Vorlesungen verfolgten Linie, möglichst wenig modellspezifische Eigenheiten zu benutzen, ist es klar, daß wir für die invarianten Terme der klassischen Wirkung (4.3.73) Gegenterme erlauben und als $\Gamma_{eff}^{\text{var}}$ wieder eine Basis aller Terme der Dimension [...]₄ wählen, die *P*- und *C*-invariant sind. Kombinieren wir die Formen (4.2.9) und (4.2.15) des Wirkungsprinzips, so erhalten wir für die lokale Ward-Identität

$$w(x)\Gamma = -\frac{1}{\alpha}(\Box + \alpha m^2)\partial A + \sum_i [a_i P_i]_4^4 \cdot \Gamma$$
(4.3.82)

Der im Feld A lineare Term kann nicht renormiert werden, weil er nie Renormierungsteil sein kann (1PI und divergent).

 $\leftarrow \otimes$ = trivialer Beitrag (wegen der Subtraktion).

Die Monome P_i sind gerade unter Parität, ungerade unter Ladungskonjugation und haben UV-Grade $\delta_i \leq 4$. Die Frage, ob wir $\Gamma_{eff}^{\text{var}}$ so wählen können, daß die $a_i P_i$ kompensiert werden, wollen wir wieder algebraisch entscheiden, analog zu dem im Abschnitt (4.3.1) vorgeführten Vorgehen. Es läßt sich nämlich leicht verifizieren, daß

$$[w(x), w(y)] = 0, (4.3.83)$$

d.h. daß die Brechungen $a_i P_i$ ebenfalls einer Konsistenzbedingung genügen müssen:

$$a_i(w(x)P_i(y) - w(y)P_i(x)) = 0. (4.3.84)$$

Die Liste der P_i lautet:

$$\{P_i\} = \{A_{\mu}A_{\nu}\partial^{\mu}A^{\nu}, A^2\partial A, \partial_{\mu}(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi), \Box\partial A, \partial A\}$$
(4.3.85)

Die konkrete Rechnung führt zum Ergebnis, daß nur eine *Kombination* der ersten beiden Terme konsistent ist:

$$\{P_i\} = \{2A_{\mu}A_{\nu}\partial^{\mu}A^{\nu} + A^2\partial A, \partial_{\mu}(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi), \Box\partial A, \partial A\}$$
(4.3.86)

Nun kann man sich davon überzeugen, daß diese P_i Variationen sind:

$$P_{i}^{\text{konsist}} = w(x) \int dy \Delta_{i}(y)$$

$$\{\Delta_{i}\} = \{-\frac{1}{4} \int (AA)^{2}, -\int \bar{\psi}A^{\mu}\gamma_{\mu}\psi, \frac{1}{2} \int (\partial A)^{2}, -\frac{1}{2} \int A^{2}\}$$
(4.3.87)

Die Konsequenz dieser Rechnung ist also, daß alle "Anomaliekandidaten" P_i absorbiert werden können: die Ward-Identität

$$w(x)\Gamma = -\frac{1}{\alpha}(\Box + \alpha m^2)\partial A \qquad (4.3.88)$$

gilt in allen Ordnungen.

Die QED ist eine so wichtige Theorie, daß wir wenigstens noch eine Bemerkung machen wollen, wie sie etwas "üblicher" behandelt werden kann, insbesondere im Fall des masselosen Photons. Führt man eine Hilfsmasse $\frac{1}{2}m^2(s-1)^2A^2$ für das Photon ein und analysiert die Konvergenzkriterien UV-versus IR-Subtraktionen, so gelangt man nämlich zu einem sehr befriedigenden Resultat. Wählt man den IR-Subtraktionsgrad $\rho(\gamma)$ eines 1PI Diagramms genau gleich seiner erlaubten oberen Grenze (vergl.(3.2.126))

$$\rho(\gamma) = \delta(\gamma) + 1, \tag{4.3.89}$$

so sind die Diagramme (für Nicht-Ausnahme-Impulse) konvergent, wenn man für Γ_{eff} die folgende Wahl trifft

$$\Gamma_{eff} = \Gamma_{eff}^{\text{inv}} + \Gamma_{g.f.} + \left[\int \frac{1}{2} \alpha A^2\right]_4$$

$$\Gamma_{eff}^{\text{inv}} = \left[\int \left(-\frac{1}{4}(1+z_A)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(1+z_F)i\partial\!\!\!/\psi - \hat{M}\bar{\psi}\psi + i\hat{e}\bar{\psi}A^\mu\gamma_\mu\psi\right)\right]_4$$

$$(4.3.90)$$

D.h. Γ_{eff} ist im wesentlichen die klassische Wirkung + Gegenterme derselben Gestalt ($z_A = O(e), z_F = O(e), \hat{M} = M + O(e), \hat{e} = e + O(h^2)$). (4.3.89) hier wiederum heißt nichts anderes als nur UV-Subtraktionen auszuführen! Der Subtraktionsoperator lautet nämlich (3.2.124)

$$1 - T = (1 - t_{p,s-1}^{\rho-1})(1 - t_{p,s}^{\delta})$$

= $1 - t_{p,s}^{\delta} - t_{p,s-1}^{\rho-1} + t_{p,s-1}^{\rho-1} t_{p,s}^{\delta}$
= $1 - t_{p,s}^{\delta} - t_{p,s-1}^{\rho-1} + t_{p,s-1}^{\delta} t_{ps}^{\delta}$
= $1 - t_{p}^{\delta}$ (4.3.91)

an der Stelle s = 1. Die UV-Subtraktionen allein und die einfachste Erweiterung der klassischen Wirkung um Gegenterme führen also zu UV- und IR-konvergenten Diagrammen (außerhalb der Massenschale).

4.4 QED: Konsequenzen aus der Ward-Identität

4.4.1 Strom- und Ladungsoperator

Die Ward-Identität (4.3.74), umgeordnet in die Form

$$ie\bar{\psi}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}}\Gamma - \Gamma\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi}ie\psi = -\partial^{\mu}\Big(\frac{\delta\Gamma}{\delta A^{\mu}} - \frac{1}{\alpha}(\Box + \alpha m^2)A_{\mu}\Big), \qquad (4.4.1)$$

definiert eine Einsetzung: den Strom j_{μ}

$$ie\bar{\psi}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}}\Gamma - \Gamma\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi}ie\psi = \partial^{\mu}[j_{\mu}]_{3}\cdot\Gamma$$
(4.4.2)

Gehen wir per Legendre-Transformation

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta A^{\mu}} = -J_{\mu} \quad \frac{\overline{\delta}}{\delta \overline{\psi}} = -\eta \quad \Gamma \overline{\delta} = -\overline{\eta}
A_{\mu} = \frac{\delta Z_{c}}{\delta J^{\mu}} \quad \psi = \frac{\overline{\delta}}{\delta \overline{\eta}} \quad \overline{\psi} = Z_{c} \frac{\overline{\delta}}{\delta \eta}$$
(4.4.3)

zu Z_c und dann zu Z über (vergl. (2.3.1)), so erhalten wir die Erhaltungsgleichung des Stromes ausgedrückt auf dem Niveau der Greenschen Funktionen

$$e\bar{\eta}\frac{\vec{\delta}}{\delta\bar{\eta}}Z - Z\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta}e\eta = \partial^{\mu}[j_{\mu}]_{3} \cdot Z \tag{4.4.4}$$

Die linke Seite dieser Gleichung besteht aus Kontakttermen, d.h. ihr Beitrag verschwindet, wenn man bezüglich der Spinorfelder reduziert (vergl. Abschnitt 2.4). Damit sind wir zur Operatorgleichung der Stromerhaltung gelangt:

$$\partial^{\mu} j^{O_p}_{\mu} \stackrel{*}{=} 0 \tag{4.4.5}$$

 $(\stackrel{*}{=}$ heißt: auf der Massenschale). Die Ward-Identität führt also zur Stromerhaltung. Hiermit können wir eine erhaltene Ladung definieren:

$$Q = \int d^3x j^o_{O_p}(t, \underline{x}) \tag{4.4.6}$$

$$\frac{d}{dt}Q = 0 \tag{4.4.7}$$

Denn

$$\int d^3x \partial_o j^o_{O_p} = \int d^3x \underline{\nabla} \underline{j}_{O_p} = 0.$$
(4.4.8)

Q erzeugt die Eichtransformationen mit konstantem $\omega(x) \to \omega = \text{const.}$, trägt also den Namen "Ladung" zu Recht. Auch diese Eigenschaft läßt sich mit Hilfe der Ward-Identität zeigen. Wir differenzieren (4.4.4) *m*-mal nach A_{μ} und *n*-mal nach η , aber (n + 1)-mal nach $\bar{\eta}$.

$$\partial^{x}_{\mu} \langle T j^{\mu}(x) \psi(y) X \rangle = e \delta(x - y) \langle T \psi(y) X \rangle$$

$$+ \underline{K} \text{ontakt} \underline{t} \text{erme} (X)$$

$$(4.4.9)$$

$$X \equiv A_{\mu_1}(x_1) \dots A_{\mu_m}(x_m) \psi(y_1) \dots \psi(y_n) \overline{\psi}(z_1) \dots \overline{\psi}(z_n)$$

$$(4.4.10)$$

$$K.t.(X) = \sum_{k=1}^{N} (\delta(x - y_k) \langle X_{\check{k}} \rangle + \delta(x - z_k) \langle X_{\check{k}} \rangle)$$
(4.4.11)

(wobei $\check{}$ andeutet, daß das jeweilige Argument wegzulassen ist). Nun reduzieren wir (4.4.9) bezüglich X, d.h. multiplizieren mit $\prod_{l=1}^{n} (i \ \partial_{l} \ -M) \prod_{j=1}^{n} (-i \ \partial_{j} \ -M)$ und gehen für diese Felder auf die Massenschale. Das annuliert den Beitrag K.t. (X) und führt zu

$$\partial_{\mu}^{x} T(j_{O_{p}}^{\mu}(x)\psi_{O_{p}}(y)) = e\delta(x-y)\psi_{O_{p}}(y)$$
(4.4.12)

Wir integrieren (4.4.12) über den dreidimensionalen Raum und formen zunächst die linke Seite um

$$\int d^3x \partial^x_{\mu} T(j^{\mu}_{O_p}(x)\psi_{O_p}(y)) = \partial^x_o T(Q(x_o)\psi_{O_p}(y))$$
(4.4.13)

Integrieren wir nun über das Zeitintervall $[x_o - \varepsilon, x_o + \varepsilon]$ und wählen dann $x_o = y_o$, so erhalten wir

$$T(Q(x_o + \varepsilon)\psi_{O_p}(y_o)) - T(Q(x_o - \varepsilon)\psi_{O_p}(y_o)) = e\psi_{O_p}(y)$$

$$(4.4.14)$$

$$Q \ \psi_{O_p}(y) - \psi_{O_p}(y)Q = e\psi_{O_p}(y) \tag{4.4.15}$$

Oder:

$$i[Q,\psi_{O_p}(y)] = ie\psi_{O_p}(y) \equiv \delta\psi_{O_p}(y) \tag{4.4.16}$$

(Die Wahl $x_o = y_o$ ist gerechtfertigt, denn Q hängt ja nicht ab von der Zeit.) Dies ist nichts anderes als das Transformationsgesetz für ψ in Operatorform. Analog findet man

$$i[Q, \bar{\psi}_{O_p}(y)] = -ie\bar{\psi}_{O_p}(y) \tag{4.4.17}$$

$$i[Q, A^{O_p}_{\mu}(y)] = 0 \tag{4.4.18}$$

d.h. A_{μ} ist nicht geladen.

Wenden wir den Ward-Identitätsoperator **W** auf das "klassische" Feld ψ an, das Argument des Funktionals Γ ist, so ergibt sich

$$\mathbf{W}\psi(y) = ie\psi(y) = \delta\psi(y), \qquad (4.4.19)$$

d.h. die funktionale Formulierung übernimmt genau die Rolle, die die Operatorformulierung vorgibt. Der Genauigkeit halber merken wir an, daß eine vollständige Diskussion von (4.4.16) die Untersuchung der Definitionsbereiche der Operatoren erforderlich machen würde. Es würde sich herausstellen, daß dies ein durchaus schwieriges Kapitel ist. Daher zieht man sich gerne auf die funktionale Formulierung und Greensche Funktionen zurück, die sehr viel einfacher handzuhaben sind, und doch die gesamte Information enthalten.

Als nächstes wollen wir die Gleichung

$$\mathbf{w}(x)\Big(\Big[\int j_{\mu}(y)\Big]_{3}\cdot\Gamma\Big) = 0 \tag{4.4.20}$$

beweisen und eine Folgerung daraus ziehen. In der klassischen Näherung ist (4.4.20) sicher richtig, denn $j_{\mu} = \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi$ ist eichinvariant. Für höhere Ordnungen denken wir uns j_{μ} an ein eichinvariantes *äußeres* Feld q^{μ} gekoppelt und versuchen, alle möglichen Terme zu finden, die linear in q^{μ} sind, eichinvariant und Dimension 4 haben: Es gibt keine außer $q^{\mu}j_{\mu}$. D.h. das entsprechende $\Gamma_{eff}^{(q)}$ kann nur $\int q^{\mu}j_{\mu}$ multipliziert mit einem numerischen Faktor enthalten.

$$\mathbf{w}\Gamma^{(q)} = \frac{1}{\alpha}(\Box + \alpha m^2)\partial A \tag{4.4.21}$$

folgt hiermit und aus (4.4.21), differenziert nach q^{μ} an der Stelle $q^{\mu} = 0$

$$\mathbf{w}\left(\left[j_{\mu}\right]_{3}\cdot\Gamma\right) = 0 \tag{4.4.22}$$

Die Legendre-Transformation und Übergang zum Funktional Z liefern schließlich aus (4.4.21)

$$i\partial^{\lambda} J_{\lambda}(x)[j_{\mu}(y)]_{3} \cdot Z + ie[j_{\mu}(y)]_{3} \cdot Z \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta} \eta - ie[j_{\mu}(y)]_{3} \cdot \overline{\eta} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\overline{\eta}} Z$$

$$= -\frac{1}{\alpha} (\Box + \alpha m^{2})[j_{\mu}(y)]_{3} \partial^{\lambda} \frac{\delta Z}{\delta A^{\lambda}(x)}$$

$$(4.4.23)$$

Für Greensche Funktionen X lautet (4.4.23)

K.t. =
$$-\frac{1}{\alpha} (\Box + \alpha m^2) \langle \partial^{\lambda} A_{\lambda}(x) j_{\mu}(y) X \rangle \rangle$$
 (4.4.24)

Nach Reduktion heißt das

$$0 \stackrel{*}{=} -\frac{1}{\alpha} (\Box + \alpha m^2) T \Big(\partial^{\lambda} A^{O_p}_{\lambda}(x) j^{O_p}_{\mu}(y) \Big)$$
(4.4.25)

Hieraus kann man durch Untersuchung der Trägereigenschaften im Vorwärts- und Rückwärtslichtkegel auf

$$[\partial A^{O_p}(x), j^{O_p}_{\mu}(y)] = 0 \tag{4.4.26}$$

schließen. D.h. $j_{\mu}^{O_p}$ hat keine Matrixelemente zwischen physikalischen und nichtphysikalischen Zuständen.

4.4.2 Unitarität der S-Matrix

Wir haben in der freien Theorie für masselose Photonen die Konstruktion des Hilbertraums aus dem Fockraum skizziert (vergl. Abschnitt 1.3). Für massive (freie) Photonen ist die Situation noch etwas einfacher als für masselose, weil nämlich nur Zustände positiver oder negativer Norm auftreten, aber keine Zustände der Norm Null in Konflikt mit der Positivität des Skalarprodukts sind. Diese Zustände negativer Norm werden erzeugt vom Feld $\partial^{\mu}A_{\mu}$. (Man vergleiche auch Abschnitt 9.2.) Wir werden nun zeigen, daß auch in der wechselwirkenden Theorie $\partial^{\mu}A_{\mu}$ ein freies Feld ist und somit die Konstruktion der freien Theorie anwendbar bleibt.

Die Ward-Identität für die Vertexfunktionen

$$-\partial_{\mu}\frac{\delta\Gamma}{\delta A_{\mu}} - ie\bar{\psi}\frac{\vec{\delta}}{\delta\bar{\psi}}\Gamma + \Gamma\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi}\psi_{ie} = -\frac{1}{\alpha}(\Box + \alpha m^{2})\partial A \qquad (4.4.27)$$

lautet für zusammenhängende Greensche Funktionen

$$\partial_{\mu}J^{\mu} - ie\bar{\eta}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}Z_{c} + Z_{c}\frac{\delta}{\delta\eta}ie\eta = -\frac{1}{\alpha}(\Box + \alpha m^{2})\partial^{\mu}\frac{\delta Z_{c}}{\delta J^{\mu}}$$
(4.4.28)

und nach Übergang zu den allgemeinen Greenschen Funktionen $(Z = e^{iZ_c})$

$$\partial^{\mu}J_{\mu} \cdot Z - ie\bar{\eta}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}}Z + Z\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta}\eta ie = \frac{1}{\alpha}(\Box + \alpha m^2)\partial^{\mu}\frac{\delta Z}{\delta J^{\mu}}.$$

Hieraus folgt für die Zweipunktfunktion

$$i\partial_{\nu}\delta(x-y) = \frac{1}{\alpha} (\Box_x + \alpha m^2) \langle T \langle \partial^{\mu} A_{\mu}(x) A_{\nu}(y) \rangle \rangle,$$

während alle anderen Matrixelemente verschwinden

$$J^{\mu}(\Box + \alpha m^2) \langle \partial AX \rangle = 0 \qquad (X \neq A_{\nu}).$$

Hier besagt das Gleichheitszeichen, daß wir die äußeren Beine amputiert haben und mit den Impulsen auf die Massenschale gegangen sind. Es gilt also die Operatorgleichung

$$(\Box + \alpha m^2)\partial A^{O_p} = 0$$

d.h. ∂A^{O_p} ist ein freies Feld.

Damit gestattet ∂A^{O_p} aber auch in allen höheren Ordnungen der Störungstheorie die Zerlegung in Erzeuger und Vernichter

$$\partial A^{O_p} = \partial A^{O_p(+)} + \partial A^{O_p(-)}$$

(bzw. positive und negative Frequenzanteile) und man kann aus dem Fockraum wieder wie in der freien Theorie den Hilbertraum konstruieren. Da Γ_{int} Hermitesch, die S-Matrix im Fockraum also pseudo-unitär ist und da ∂A^{O_p} das einzige Geistfeld ist, ist damit die S-Matrix auf dem Hilbertraum unitär.

Nach all diesen Folgerungen aus der Ward-Identität ist vielleicht klar, warum wir die QED durch sie und nicht etwa durch ihre (klassische oder effektive) Wirkung definieren wollen: die Ward-Identität gilt unabhängig vom Renormierungsschema, Γ_{eff} hingegen hängt vom Schema ab und liefert nur mit diesem Schema zusammen ein eindeutiges Funktional Γ . Entsprechendes gilt für die anderen, oben betrachteten Beispiele: lediglich ein Γ_{eff} vorzugeben ist nicht ausreichend – die Ward-Identitäten hingegen charakterisieren die in Frage stehenden Theorien wirklich und machen sie zusammen mit Normierungsbedingungen eindeutig.

4.5 Parametrische Differentialgleichungen

4.5.1 Die Callan-Symanzik-Gleichung

Das massive φ^4 -Modell, wie wir es in (4.1.26) durch Vorgabe von Γ_{eff} und Subtraktionsvorschrift gemäß der Waldformel (3.2.98) definiert haben, hängt von zwei dimensionsbehafteten Parametern ab: der Masse m und dem Normierungspunkt κ , an dem wir die Kopplung fixiert haben (4.1.27). Zur Vereinfachung der Diskussion setzen wir für den Augenblick $\kappa = 0$ und verallgemeinern unsere Ergebnisse dann am Ende. Die Ableitung $m^2 \partial_{m^2}$, deren Effekt wir bereits im Abschnitt 4.1 studiert haben, sollte Auskunft über das Skalenverhalten der Greenschen Funktionen geben. Insbesondere erwartet man naiverweise, daß eine Differentiation nach m^2 den Abfall für große Impulse eine p^2 -Potenz vergrößern sollte. Betrachten wir das Beispiel (4.1.3) und seine Verallgemeinerung auf N > 3, so ist diese Erwartung auch bestätigt, nicht aber im Fall N = 2 (4.1.20), einem divergenten Diagramm. Der Subtraktionsterm führt dazu, daß für große p das Integral konstant bleibt (entsprechend $\delta = 0$), während die *p*-abhängigen Terme in der Tat mit $|p|^{-2}(\delta = -2)$ verschwinden. Um das nicht-naive Verhalten besser zu verstehen und dann auch quantitativ zu beschreiben, nutzen wir die in 4.1.2. gemachte Beobachtung aus, daß (4.1.20) genau die "weiche" Einsetzung¹ $\Delta_m = \left[\frac{1}{2}\int \varphi^2\right]_2$ enthält

$$m^{2} \partial_{m^{2}} \Gamma_{4}^{(1)}(q_{1}, \dots q_{4}) = m^{2} (\Delta_{2} \cdot \Gamma)_{4}^{(1)}$$

$$(4.5.1)$$

$$=m^{2}(\Delta_{m}\cdot\Gamma)_{4}^{(1)}-a_{2}\lambda^{2}\int\frac{dk}{(2\pi)^{4}}\frac{2i^{2}m^{2}}{(k^{2}-m^{2})^{3}}$$
(4.5.2)

Der Übergang von (4.5.1) zu (4.5.2) ist aber nichts anderes als die Zimmermann-Identität (3.2.107)! D.h. der Korrekturterm entspricht der Einsetzung Δ_4 in niedrigster Näherung, kann also gemäß (4.1.22) als Ableitung nach der Kopplung λ aufgefaßt werden. Wir identifizieren ihn:

$$(-\beta_{\lambda}\partial_{\lambda}\Gamma)_{4}^{(1)} = -a_{2}\lambda^{2}\int \frac{dk}{(2\pi)^{4}} \frac{2i^{2}m^{2}}{(k^{2}-m^{2})^{3}}$$
(4.5.3)

Da das Integral unabhängig vom äußeren Impuls ist, kann es nur der klassischen Näherung entsprechen, muß also β_{λ} demnach von der Ordnung $\hbar(=\lambda^2)$ sein.

$$-\beta_{\lambda}^{(1)}\partial_{\lambda}\Gamma_{4}^{(o)} = -\beta_{\lambda}^{(1)}(-\frac{1}{4!}) \cdot 4! = \beta_{\lambda}^{(1)}$$
(4.5.4)

$$\beta_{\lambda}^{(1)} = -a_2 \lambda^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \frac{2i^2 m^2}{(k^2 - m^2)^3} = \frac{3}{2} \lambda^2 \frac{1}{16\pi^2}$$
(4.5.5)

Damit lautet (4.5.2)

$$(m^2 \partial_{m^2} + \beta_\lambda \partial_\lambda) \Gamma_4^{(1)} = (\Delta_m \cdot \Gamma)_4^{(1)}.$$
(4.5.6)

Die Tatsache, daß es gerade die Zimmermann-Identität ist, die von der Einsetzung Δ_2 zu Δ_m führt, Δ_m aber gerade der naiven Erwartung von Skalenverhalten entspricht, legt nahe, auch für höhere Ordnungen die Korrekturen aus dieser Identität zu entnehmen. (4.5.6) bzw. (4.1.22) suggerieren die Verwendung des Differentialoperators ∂_{λ} und veranlassen die Frage, ob nicht auch die letzte verbliebene harte Einsetzung, Δ_1 , durch einen Differentialoperator dargestellt werden könnte. Wie ein Blick auf (4.2.15) zeigt, ist das in der Tat der Fall. Hiermit haben wir alle Konstruktionselemente gesammelt, um die Gleichung (4.5.1) in ihre endgültige

¹ "weich" heißt asymptotisches Verhalten bei Subtraktionsgrad $\delta = -2$; "hart" ist die Einstrung Δ_2 , die zum Subtraktionsgrad $\delta = 0$ führt.

Form zu bringen. Wir kombinieren

$$m^{2}\partial_{m^{2}}\Gamma = [m^{2}\partial_{m^{2}}\Gamma_{eff}]_{4} \cdot \Gamma = [\qquad (m^{2}+a)\Delta_{2} \qquad]_{4} \cdot \Gamma$$

$$\partial_{\lambda}\Gamma = [\partial_{\lambda}\Gamma_{eff}]_{4} \cdot \Gamma = [\qquad \frac{\partial z}{\partial \lambda}\Delta_{1} + \frac{\partial a}{\partial \lambda}\Delta_{2} \qquad + \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda}\Delta_{4}]_{4} \cdot \Gamma$$

$$\int \varphi \frac{\delta}{\delta \varphi} \Gamma = \left[\int \varphi \frac{\delta^{1} eff}{\delta \varphi} \right]_{4} \cdot \Gamma = \left[2(1+z)\Delta_{1} + 2(m^{2}+a)\Delta_{2} + 4\hat{\lambda}\Delta_{4} \right]_{4} \cdot \Gamma$$

$$(m^{2}+a)\Delta_{m}\Gamma = \left[u\Delta_{1} + (m^{2}+a)\Delta_{2} + v\Delta_{4} \right]_{4} \cdot \Gamma$$

$$(4.5.7)$$

zu

$$(m^2 \partial_{m^2} + \beta_\lambda \partial_\lambda - \gamma N)\Gamma = \alpha_m (m^2 + a)\Delta_m \cdot \Gamma$$
(4.5.8)

 $(N \equiv \int \varphi \frac{\delta}{\delta \varphi}$ ist ein Anzahloperator; $m^2 \partial_{m^2} a = a, m^2 \partial_{m^2} \hat{\lambda} = 0$ auf Grund der naiven Dimensionsanalyse.)

Hierbei ist vorausgesetzt, daß wir die folgenden Gleichungen in jeder Ordnung lösen können:

$$\Delta_1 \left(\beta_\lambda \frac{\partial z}{\partial \lambda} - 2\gamma(1+z) - \alpha_m u \right) = 0$$

$$\Delta_2 \left((m^2 + a) + \beta_\lambda \frac{\partial a}{\partial \lambda} - 2\gamma(m^2 + a) - \alpha_m (m^2 + a) \right) = 0$$
(4.5.9)
$$\Delta_4 \left(\beta_\lambda \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \lambda} - 4\gamma \hat{\lambda} - \alpha_m v \right) = 0$$

Wir betrachten diese Bedingungen Ordnung für Ordnung.

$$(\hbar)^{o}: -2\gamma^{(o)} = 0, \quad 1 - \alpha_{m}^{(o)} = 0 \quad \beta_{\lambda}^{(o)} = 0 \quad (4.5.10)$$

Das entspricht genau unserer früheren Analyse.

$$(\hbar)^{1}: \qquad -2\gamma^{(1)} - u^{(1)} = 0 -2\gamma^{(1)}m^{2} - \alpha_{m}^{(1)}m^{2} = 0 \beta^{(1)}\lambda - 4\gamma^{(1)}\lambda - v^{(1)} = 0$$

$$(4.5.11)$$

D.h.

$$2\gamma^{(1)} = -u^{(1)}$$

$$\alpha_m^{(1)} = u^{(1)}$$

$$\beta_{\lambda}^{(1)} = v^{(1)} - 2u^{(1)}\lambda$$

(4.5.12)

Auch in höheren Ordnungen wiederholt sich diese Situation: in der Gleichung Δ_1 ist der Koeffizient für $\gamma^{(n)}$, in der Gleichung $\hat{\Delta}_2$ der Koeffizient von $\alpha_m^{(n)}$, in der Gleichung Δ_4 der Koeffizient von $\beta_{\lambda}^{(n)}$ derselbe wie in der Ein-Schleifen-Näherung.

D.h. γ, α_m, β sind in allen Ordnungen eindeutig bestimmt, das Gleichungssystem (4.5.9) ist erfüllt.

Nun ist es auch einfach, $\kappa \neq 0$ zuzulassen. Aus $m^2 \partial_{m^2}$ wird

$$D \equiv m^2 \partial_{m^2} + \kappa^2 \partial_{\kappa^2} \tag{4.5.13}$$

der "Skalenoperator" (vergl. Abschnitt 4.5.2). An der Herleitung von (4.5.8) (mit D an der Stelle von $m^2 \partial_{m^2}$) ändert sich nichts, denn

$$Dz = D\hat{\lambda} = 0, \quad Da = a. \tag{4.5.14}$$

Die Eleganz dieser Lösung in allen Ordnungen der Störungstheorie rührt natürlich daher, daß wir die Gleichungen (4.5.7) als bewiesen angesehen haben. Es ist sehr instruktiv, den Effekt von $m^2 \partial_{m^2}$ an einem Zwei-Schleifen-Beispiel unmittelbar zu studieren. Der Beweis von (4.5.8) heißt dann nichts anderes, als Zimmermann-Identität und Wirkungsprinzip ganz konkret herzuleiten. Wir nehmen die Diskussion des Beispiels $\Gamma_{\varphi\varphi}^{(2)}$ aus Abschnitt 3.2.2 (beginnend mit Gleichung (3.2.53)) wieder auf und wollen $m^2 \partial_m \Gamma^{(2)}$ untersuchen. Der einzige Beitrag zu $\Gamma_{\varphi\varphi}^{(2)}$, der ein echtes Zwei-Schleifen Diagramm darstellt, ist:



$$m^{2}\partial_{m^{2}}\Gamma^{(2)}_{\varphi\varphi} = \int dk_{1}dk_{2}m^{2}\partial_{m^{2}}R_{\gamma}$$

$$m^{2}\partial_{m^{2}}R_{\gamma} = (1 - t_{\gamma}^{2})\{m^{2}\partial_{m^{2}}I_{\gamma}(\emptyset) + \sum_{i=1}^{3}(m^{2}\partial_{m^{2}}I_{\gamma/\gamma_{i}}S_{\gamma}(-t_{\gamma_{i}}^{o})I_{\gamma_{i}}$$

$$+ I_{\gamma/\gamma_{i}}S_{\gamma}(-t_{\gamma_{i}}^{o}m^{2}\partial_{m^{2}}I_{\gamma_{i}}))\}$$

$$(4.5.16)$$

Gemäß Gleichung (4.5.8) müssen wir (4.5.15) mit

$$(\beta \partial_{\lambda} \Gamma_{\varphi\varphi})^{(2)}, 2(\gamma \Gamma_{\varphi\varphi})^{(2)}, (\alpha_m \Delta_m \Gamma)^{(2)}_{\varphi\varphi})$$

vergleichen. Wir berechnen daher zuerst diese Größen.

$$(\beta \partial_{\lambda} \Gamma_{\varphi\varphi})^{(2)} = \beta^{(1)} \partial_{\lambda} \Gamma_{\varphi\varphi} + \beta^{(2)} \partial_{\lambda} \Gamma_{\varphi\varphi}^{(o)}$$

$$2(\gamma \Gamma_{\varphi\varphi})^{(2)} = 2\gamma^{(1)} \Gamma_{\varphi\varphi}^{(1)} + 2\gamma^{(2)} \Gamma_{\varphi\varphi}^{(o)}$$

$$(\alpha_m \Delta_m \Gamma)_{\varphi\varphi}^{(2)} = \alpha_m^{(o)} (\Delta_m \Gamma)_{\varphi\varphi}^{(2)} + \alpha_m^{(1)} (\Delta_m \Gamma)_{\varphi\varphi}^{(1)} + \alpha_m^{(2)} (\Delta_m \Gamma)_{\varphi\varphi}^{(o)}$$

$$(4.5.17)$$
Diese Gleichungen geben die Entwicklung in der Anzahl der Schleifen wieder. Die beitragenden Vertexfunktionen lauten

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^{(o)} = p^2 - m^2 \qquad (\Delta_m \Gamma)_{\varphi\varphi}^{(o)} = -m^2 \quad \alpha_m^{(o)} = 1$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^{(1)} = \underbrace{\bigcirc} \qquad \to 0 \qquad \text{wegen der Subtraktionen } (\delta = 2)$$

$$(\Delta_m \Gamma)_{\varphi\varphi}^{(1)} = \underbrace{\frown} \qquad \to 0 \qquad \text{```} \qquad (\delta = 0) \qquad (4.5.19)$$

Hiermit folgt

$$(\beta \partial_{\lambda} \Gamma_{\varphi\varphi})^{(2)} = 0$$

$$2(\gamma \Gamma_{\varphi\varphi})^{(2)} = 2\gamma^{(2)}(p^2 - m^2)$$

$$(\alpha_m \Delta_m \Gamma)^{(2)}_{\varphi\varphi} = -m^2 \alpha_m^{(2)} + (\Delta_m \cdot \Gamma)^{(2)}_{\varphi\varphi}$$

(4.5.20)

Genauer zu untersuchen bleibt also

$$(\Delta_m \Gamma)^{(2)}_{\varphi\varphi} = \int dk_1 dk_2 \sum_{i=1}^3 R^{\Delta_i}_{\gamma}$$
(4.5.21)

Für die beiden anderen Diagramme:
 \iff und
 \iff ist die Diskussion völlig analog. Für die Integranden gilt

$$m^2 \partial_{m^2} I_{\gamma} = \sum_i I_{\hat{\gamma}}^{\Delta_i} \tag{4.5.22}$$

Divergent ist das Diagramm γ mit Einsetzung Δ_m ($\delta(\gamma) = 0$) und ebenso das Unterdiagramm γ_3 (mit $\delta(\gamma_3) = 0$). (Vergl. Abb.4.2) Relevant für die Subtraktionen sind daher die Wälder $\emptyset, \{\gamma\}, \{\gamma, \gamma_3\}$ und für $R_{\gamma}^{\Delta_3}$ folgt

$$R_{\gamma}^{\Delta_{3}} = (1 - t_{p^{\gamma}}^{o})I_{\gamma}^{\Delta_{3}}(\emptyset) + (1 - t_{p^{\gamma}}^{o})S_{\gamma}(-t_{p^{\gamma_{3}}}^{o})I_{\gamma}^{\Delta_{3}}(\{\gamma, \gamma_{3}\})$$

= $(1 - t_{p^{\gamma}}^{o})\left\{I_{\gamma}^{\Delta_{3}}(\emptyset) + I_{\gamma/\gamma_{3}}^{\Delta_{3}}S_{\gamma}(-t_{p^{\gamma_{3}}}^{o}I_{\gamma_{3}}\right\}$ (4.5.23)

Die diagrammatische Zuordnung im zweiten Beitrag von (4.5.23) ist die folgende:

Somit ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{3} R_{\gamma}^{\Delta_{i}} = (1 - t_{p\gamma}^{o}) \left\{ \sum_{i} I_{\gamma}^{\Delta_{i}}(\emptyset) + \sum_{i} I_{\gamma/\gamma_{i}}^{\Delta_{i}} S_{\gamma}(-t_{p\gamma_{i}}^{o} I_{\gamma_{i}}) \right\}$$
(4.5.24)

und damit für die Differenz "harte-weiche" Einsetzung

$$m^{2}\partial_{m^{2}}\Gamma_{\varphi\varphi}^{(2)} - (\Delta_{m}\Gamma)_{\varphi\varphi}^{(2)}$$

$$= \int dk_{1}dk_{2} \Big\{ (1 - t_{p\gamma}^{2}) \Big(m^{2}\partial_{m^{2}}I_{\gamma}(\emptyset) + \sum_{i} (m^{2}\partial_{m^{2}}I_{\gamma/\gamma_{i}}S_{\gamma}(-t_{p\gamma_{i}}^{o})I_{\gamma_{i}} + I_{\gamma/\gamma_{i}}S_{\gamma}(-t_{\gamma_{i}}^{o})m^{2}\partial_{m^{2}}I_{\gamma_{i}}) \Big)$$

$$- (1 - t_{p\gamma}^{o}) \Big(\sum_{i} I_{\gamma}^{\Delta_{i}}(\emptyset) + \sum_{i} I_{\gamma/\gamma_{i}}^{\Delta_{i}}S_{\gamma}(-t_{p\gamma_{i}}^{o})I_{\gamma_{i}} \Big) \Big\}$$

$$= \int dk_{1}dk_{2} \Big\{ (-t_{p\gamma}^{2} + t_{p\gamma}^{o}) \Big(m^{2}\partial_{m^{2}}I_{\gamma}(\emptyset) + \sum_{i} m^{2}\partial_{m^{2}}I_{\gamma/\gamma_{i}}S_{\gamma}(-t_{p\gamma_{i}}^{o})I_{\gamma_{i}} \Big)$$

$$+ (1 - t_{p\gamma}^{2}) \sum_{i} I_{\gamma/\gamma_{i}}S_{\gamma}(-t_{p\gamma_{i}}^{o})m^{2}\partial_{m^{2}}I_{\gamma_{i}} \Big\}$$

$$(4.5.25)$$

Die Beiträge $\int (-t_{p\gamma}^2 + t_{p\gamma}^o)(\cdots)$ sind lokal und führen zu $2\gamma^{(2)}(p^2 - m^2) - m^2 \alpha_m^{(2)}$. Der Rest in (4.5.25) sieht aus wie ein allgemeines d.h. nicht-lokales Diagramm mit Einsetzung. Da dafür in der Gleichung neben $\Delta_m \cdot \Gamma$ nichts vorgesehen ist, sollte er identisch in p verschwinden. Das wollen wir jetzt in der Tat zeigen. Um die Struktur dieser Beiträge zu verstehen, erinnern wir noch einmal an die Ein-Schleifen-Diskussion (4.1.20). Zuerst bemerken wir, daß gerade

$$m^2 \partial_{m^2} I_{\gamma_i} = m^2 \partial_{m^2} \qquad (4.5.26)$$

d.h. für das subtrahierte Diagramm

$$R_{\gamma_i} = (1 - t_p^{o})I_{\gamma_i} \tag{4.5.27}$$

$$m^{2}\partial_{m^{2}}\int dkR_{\gamma_{i}} = \int dk(1-t_{p^{\gamma_{i}}}^{o})m^{2}\partial_{m^{2}}I_{\gamma_{i}}$$

$$= \int dkm^{2}\partial_{m^{2}}I_{\gamma_{i}} + \int dk(-t_{p^{\gamma_{i}}}^{o})m^{2}\partial_{m^{2}}I_{\gamma_{i}}$$

$$(4.5.28)$$

Der erste Term ist nichts anderes als $(\alpha_m \Delta_m \Gamma)^{(1)}_{\varphi \varphi \varphi \varphi}$, der zweite $-(\beta \partial_\lambda \Gamma)^{(1)}_{\varphi \varphi \varphi \varphi}$ (denn $\gamma^{(1)} = 0$). Hiermit ist $(-t^o_{p\gamma_i})m^2 \partial_{m^2} I_{\gamma_i}$ in (4.5.25) identifiziert. Nun benutzen wir (3.2.88), um die explizite Gestalt für den Restterm anzugeben. (Man hat in (3.2.88) nur zu bedenken, daß zusätzlich am Ort von $(-t^o_{p\gamma_i})$ auch $m^2 \partial_{m^2}$ auftaucht.)

$$\int dk_1 dk_2 (1 - t_{p\gamma}^2) \sum_i I_{\gamma/\gamma_i} S_{\gamma}(-t_{p\gamma_i}^o) m^2 \partial_{m^2} I_{\gamma_i}$$

=
$$\int dk_1 dk_2 (1 - t_{p\gamma}^2) \left\{ \frac{1}{(k_1 + p)^2 - m^2} S_{\gamma}(-t_{p\gamma_3}^o) m^2 \partial_{m^2} \frac{1}{((\frac{1}{2}k_1 - k_2)^2 - m^2)^2} \right\}$$

4.5. PARAMETRISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

(Es "überlebt" nur der Beitrag von γ_3 .)

$$= \int dk_1 (1 - t_{p\gamma}^2) \frac{1}{(k_1 + p)^2 - m^2} \int dk_2 \Big(-m^2 \partial_{m^2} \Big) \frac{1}{(k_2^2 - m^2)^2} \Big)$$
(4.5.29)

Das Integral über k_2 existiert und entspricht $\beta^{(1)}$.

$$=\beta^{(1)}\int dk_1(1-t_{p^{\gamma}}^2)\frac{1}{(k_1+p)^2-m^2}$$
(4.5.30)

Dieses Integral existiert ebenfalls und ist absolut konvergent. Um zu zeigen, daß es verschwindet, benutzen wir die Taylorentwicklung einer Funktion mit speziellem Restglied:

$$f(k+p) = f(k) + p\partial_k f(k) + \frac{1}{2}pp\partial_k\partial_k f(k) + \int_o^1 d\lambda\rho(\lambda)ppp\partial_k\partial_k\partial_k f(k+\lambda p)$$

= $f(k) + p[\partial_p f(k+p)]_{p=0} + \frac{1}{2}pp[\partial_p\partial_p f(k+p)]_{p=0}$
+ $\int_o^1 d\lambda\rho(\lambda)ppp\partial_k\partial_k\partial_k f(k+\lambda_p)$
(4.5.31)

$$(1 - t_p^2)f(k+p) = \int_o^1 d\lambda\rho(\lambda)ppp\partial_k\partial_k\partial_kf(k+\lambda p)$$
$$\int dk(1 - t_p^2)f(k+p) = \int dk \int_o^1 d\lambda\rho(\lambda)ppp\partial_k\partial_k\partial_kf(k+\lambda p)$$
(4.5.32)

Die Variablentransformation $k' = k + \lambda p$ ist wegen der absoluten Konvergenz erlaubt, ebenso die Vertauschung der Integrationen und führt zu

$$\int dk(1-t_p^2)f(k+p) = \int_o^1 d\lambda\rho(\lambda) \int dk'ppp\partial_{k'}\partial_{k'}\partial_{k'}f(k')$$

$$= 0$$
(4.5.33)

Damit haben wir gezeigt, daß der obige Beitrag in der Tat verschwindet.

Diese letzte Etappe der Rechnung wollen wir auch noch einmal diagrammatisch illustrieren.



139

 $m^2 \partial_{m^2} I_{\gamma_3}$ kann integriert werden; $m^2 \partial_{m^2} (-t^o_{p^{\gamma_3}}) I_{\gamma_3}$ ist bezüglich $p^{\gamma_3} = k_1^{\gamma}$ eine Konstante und kann integriert werden. Es entsteht

mit der Zuordnung
$$\beta^{(1)}I_{\gamma/\gamma_3}$$

Dank der Subtraktion $(1 - t_{p^{\gamma}}^2)$ kann diese Funktion integriert werden – das Integral verschwindet; Diagramm und analytischer Ausdruck sind also einem "Tadpole"-Diagramm noch weitgehend analog.

Hiermit beschließen wir die explizite Demonstration der Callan-Symanzik-Gleichung.

4.5.2 Dilatationen

Transformiert man den Minkowski-Raum gemäß

$$x' = e^{\lambda} x \qquad \lambda \epsilon \mathbf{R} \tag{4.5.34}$$

und fordert, daß Felder, die auf dem Minkowski-Raum definiert sind, Darstellungseigenschaften unter (4.5.34) haben sollen, so gelangt man für infinitesimale Transformationen zu dem Gesetz

$$\delta^D \varphi(x) = \left(d + x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \varphi(x) \tag{4.5.35}$$

d ist hierbei eine reelle Zahl, die kanonische (oder naive) Dimension des Feldes φ . Für skalare und vektorielle Felder haben wir immer d = 1 gewählt, für Spinorfelder d = 3/2.

Das Vertexfunktional

$$\Gamma = \sum_{n} \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \Gamma_n(x_1, \dots x_n)$$
(4.5.36)

(für einen Feldtyp φ formuliert) transformiert sich dann gemäß

$$\mathbf{W}^{D}\Gamma \equiv -i \int dx (d + x^{\mu}\partial_{\mu})\varphi \frac{\delta}{\delta\varphi}\Gamma.$$
 (4.5.37)

Führen wir diese Transformation explizit aus, so gelangen wir zu

$$\mathbf{W}^{D}\Gamma = -i\sum_{n} \int dx_{1} \dots dx_{n} \frac{1}{n!} \Big[\Big(nd + \sum_{k=1}^{n} x_{k}^{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{k}^{\mu}} \Big) \varphi(x_{1}) \dots \varphi(x_{n}) \Big] \Gamma_{n}(x_{1} \dots x_{n})$$

und durch partielle Integration zu

$$\mathbf{W}^{D}\Gamma = -i\sum_{n}\int dx_{1}\dots dx_{n}\frac{1}{n!}\varphi(x_{1})\dots\varphi(x_{n})\left(nd-n\cdot 4-\sum_{k=1}^{n}x_{k}^{\mu}\frac{\partial}{\partial x_{k}^{\mu}}\right)\Gamma_{n}(x_{1}\dots x_{n})$$
(4.5.38)

für die Transformation der Vertexfunktion Γ_n .

Um (4.5.38) weiter umformen zu können, benötigen wir die x-Dimension von Γ_n . Hierzu berechnen wir zur klassischen Wirkung

$$\Gamma_{cl} = \int -\frac{1}{2}\varphi(\Box + m^2)\varphi - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 \qquad (4.5.39)$$

die klassischen Vertexfunktionen. Sie lauten

$$\Gamma_2 = -\Box_{x_1} \delta(x_1 - x_2) - m^2 \delta(x_1 - x_2)$$

$$\Gamma_4 = -\lambda \delta(x_1 - x_2) \delta(x_2 - x_3) \delta(x_3 - x_4)$$
(4.5.40)

Mit

x-dim
$$(x) = 1$$
 x-dim $(dx) = 1$
x-dim $(\delta(x)) = -1$ x-dim $(\frac{\partial}{\partial x}) = -1$

$$(4.5.41)$$

folgt

x-dim
$$(\Gamma_2) = -2 - 4 = -6$$

x-dim $(\Gamma_4) = -3 \cdot 4 = -12$ (4.5.42)

also x-dim
$$(\Gamma_n) = n(-3)$$
 (4.5.43)

Für ein Feld der Dimension d, demnach

$$x-\dim (\Gamma_n) = n(d-4) \tag{4.5.44}$$

Die Vertexfunktion $\Gamma_n(x_1, \ldots, x_n)$ ist eine homogene Funktion in den Variablen x und dem Massenparameter m. Damit gilt²

$$(-m\partial_m + \sum_k x_k^{\mu} \frac{\partial}{\partial x_k^{\mu}})\Gamma_n = (\operatorname{x-dim}(\Gamma_n))\Gamma_n = n(d-4)\Gamma_n \qquad (4.5.45)$$

Setzen wir in (4.5.38) ein, so haben wir

$$\mathbf{W}^D \Gamma = im\partial_m \Gamma \tag{4.5.46}$$

hergeleitet. Diese Relation erlaubt, die Callan-Symanzik-Gleichung

$$(m\partial_m + \beta_\lambda \partial_\lambda - \gamma N)\Gamma = \alpha_m (m^2 + a)\Delta_m \cdot \Gamma, \qquad (4.5.47)$$

²Sind mehrere dimensionsbehaftete Parameter m_i vorhanden, so tritt $D \equiv \sum_i m_i \partial_{m_i}$ and ie Stelle von $m \partial_m$. (Vergl. (4.5.13).)

zu den Dilatationen in Beziehung zu setzen:

$$\mathbf{W}^{D}\Gamma = 2(-i\beta_{\lambda}\partial_{\lambda}\Gamma + i\gamma N\Gamma + i\alpha_{m}(m^{2} + a)\Delta_{m}\cdot\Gamma)$$
(4.5.48)

$$-i\int (1+\gamma+x\partial_x)\varphi\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi} = -i\beta_\lambda\partial_\lambda\Gamma + i\alpha_m(m^2+a)\Delta_m\cdot\Gamma$$
(4.5.49)

Der Beitrag γ in (4.5.47) ändert die Dimension ab, wir nennen ihn daher "anomale" Dimension. Die "weiche" Einsetzung bricht die Dilatationssymmetrie, wie man es in der klassischen Näherung vorfindet und naiv erwartet. Die Einsetzung $\partial_{\lambda}\Gamma(\sim \Delta_4 \cdot \Gamma)$ bricht die Dilatationssymmetrie auf dem quantisierten Niveau und hat Subtraktionsgrad $\delta = 4$, eine "harte" Brechung. Nach Übergang zu Z_c und dann zu Z bleiben die Beiträge der linken Seite von (4.5.49) Kontaktterme, verschwinden also auf der Massenschale, die rechte Seite verschwindet nicht: in der quantisierten Theorie sind die Dilatationen hart gebrochen (solange $\beta \neq 0$ ist). Dies ist die im Abschnitt 4.1 angekündigte physikalische Interpretation der Subtraktionsterme. Diese Anomalien sind typische quantenfeldtheoretische Effekte.

Wir wollen diesen Abschnitt mit einer weiteren Bemerkung abschließen. Die naive Dimensionsanalyse (4.5.45) umfaßt Skalierung *aller* dimensionsbehafteten Variablen in Γ ; die Dilatationen (4.5.46) skalieren nur x, die Callan-Symanzik-Gl. (4.5.47) nur die Massenparameter. Daß diese beiden Arten der Skalierung so unterschiedlich ausfallen, liegt an den logarithmischen Abhängigkeiten $\ln(x^2m^2)$, die in Γ_n auftreten können.

4.5.3 Die Renormierungsgruppengleichung

In massiven Theorien können alle Parameter der Theorie *auf* der Massenschale definiert werden: *physikalische* Normierungsbedingungen. Beispiel:

$$\Gamma_{\varphi\varphi}(p^2 = m^2) = 0 \tag{4.5.50}$$

Der Pol des Propagators liegt bei der physikalischen Masse: $m^2 \equiv m_{\rm phys}^2$

$$\partial_{p^2}\Gamma_{\varphi\varphi}(p^2 = m^2) = 1 \tag{4.5.51}$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi\varphi\varphi\varphi}(p_{sym}) = -\lambda \tag{4.5.52}$$

 p_{sym} definiert durch $p_i^2 = m_{phys}^2$, $(p_i + p_j)^2 = \frac{4}{3}m_{phys}^2$ für $i \neq j$.

Dieser Wert der Kopplungskonstanten hat physikalischen Sinn, denn es ist der Wert einer Streuamplitude an einem physikalischen Punkt.

In einer Theorie mit masselosen Teilchen ist das i.a. nicht möglich, denn die masselosen Propagatoren können Infrarotdivergenzen verursachen. In diesem Fall $mu\beta$

man einen Referenzpunkt einführen, an dem dann die Parameter fixiert werden. Auch in massiven Theorien kann es nützlich sein, einen solchen Referenzpunkt einzuführen, z.B. wenn man den Limes $m_{\text{phys}} \rightarrow 0$ studieren möchte.

$$\Gamma_{\varphi\varphi}(p^2 = \kappa^2) = m^2 \tag{4.5.53}$$

fixiert den Gegenterm von $\int \varphi^2$ in Γ_{eff} .

$$\frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_{\varphi\varphi}(p^2 = \kappa^2) = 1 \tag{4.5.54}$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi\varphi\varphi\varphi}(p_{sym}) = -\lambda$$

$$(p_i + p_j)^2 = \frac{4}{3}\kappa^2 \qquad i \neq j$$

$$(4.5.55)$$

Ebenso kann es notwendig sein, die Normierungsbedingungen im Euklidischen zu fordern: $\kappa^2 < 0.$

Die Renormierungsgruppengleichung gibt an, wie die Greenschen Funktionen von κ^2 abhängen.

$$\kappa^2 \partial_{\kappa^2} \Gamma = ? \tag{4.5.56}$$

Physikalische Größen sollten von κ^2 unabhängig sein, denn die Willkür in der Definition der Parameter der Theorie sollte auf meßbare Größen keinen Einfluß haben.

Die Antwort auf die Frage, die (4.5.56) stellt, wird vom Wirkungsprinzip (vergl. (4.1.22)) gegeben

$$\kappa^{2}\partial_{\kappa^{2}}\Gamma = [\kappa^{2}\partial_{\kappa^{2}}\Gamma_{eff}]_{4} \cdot \Gamma = [\kappa^{2}\partial_{\kappa^{2}}z\Delta_{1} + \kappa^{2}\partial_{\kappa^{2}}a\Delta_{2}] + \kappa^{2}\partial_{\kappa^{2}}\hat{\lambda}\Delta_{4}]_{4} \cdot \Gamma$$
$$\partial_{\lambda}\Gamma = [\partial_{\lambda}\Gamma_{eff}]_{4} \cdot \Gamma = [\partial_{\lambda}z\Delta_{1} + \partial_{\lambda}a\Delta_{2} + \partial_{\lambda}\hat{\lambda}\Delta_{4}]_{4} \cdot \Gamma$$
$$N\Gamma = [N\Gamma_{eff}]_{4} \cdot \Gamma = [2(1+z)\Delta_{1} + 2(m^{2}+a)\Delta_{2} + 4\hat{\lambda}\Delta_{4}]_{4} \cdot \Gamma$$
$$(m^{2}+a)\Delta_{m}\Gamma = [u\Delta_{1} + (m^{2}+a)\Delta_{2} + v\Delta_{4}]_{4} \cdot \Gamma$$
$$(4.5.57)$$

Genau wie bei der Herleitung der Callan-Symanzik-Gleichung kombinieren wir $\left(4.5.57\right)$ zu

$$(\kappa^2 \partial_{\kappa^2} + \bar{\beta} \partial_\lambda - \bar{\gamma} N)\Gamma = \bar{\alpha}_m (m^2 + a)\Delta_m \cdot \Gamma$$
(4.5.58)

Wir wollen jetzt aber nicht nur die Bedingungen

$$\kappa^{2} \partial_{\kappa^{2}} z + \bar{\beta} \partial_{\lambda} z - 2\bar{\gamma}(1+z) - \bar{\alpha}_{m} u = 0$$

$$\kappa^{2} \partial_{\kappa^{2}} a + \bar{\beta} \partial_{\lambda} a - 2\bar{\gamma}(m^{2}+a) - \bar{\alpha}_{m}(m^{2}+a) = 0$$

$$\kappa^{2} \partial_{\kappa^{2}} \hat{\lambda} + \bar{\beta} \partial_{\lambda} \hat{\lambda} - 4\bar{\gamma} \hat{\lambda} - \bar{\alpha}_{m} v = 0$$

(4.5.59)

erfüllen. Das ist sicher möglich, denn in der klassischen Näherung gilt

$$\bar{\beta}^{(o)} = \bar{\gamma}^{(o)} = \bar{\alpha}_m^{(o)} = 0 \tag{4.5.60}$$

und damit ist das System (4.5.59) lösbar. Sondern wir wollen darüberhinaus untersuchen, ob

$$\bar{\alpha}_m = 0 \tag{4.5.61}$$

in allen Ordnungen möglich ist. Dazu betrachten wir (4.5.55) für die 2-Punkt-Funktion

$$\kappa^2 \partial_{\kappa^2} \Gamma_2 + \bar{\beta} \partial_\lambda \Gamma_2 - 2\bar{\gamma} \Gamma_2 = \bar{\alpha}_m (m^2 + a) (\Delta_m \cdot \Gamma)_2 \qquad (4.5.62)$$

und wählen $p^2 = m^2$. Da die Ableitungen nach κ^2 und λ mit dieser Wahl nicht in Konflikt geraten können, müssen wir nur

$$\Gamma_{\varphi\varphi}(p^2 = m^2) = 0 \tag{4.5.63}$$

fordern, um $\bar{\alpha}_m = 0$ in allen Ordnungen zu erhalten. D.h. mit physikalischer Normierung der Masse folgt eine *homogene* Gleichung

$$(\kappa^2 \partial_{\kappa^2} + \bar{\beta} \partial_\lambda - \bar{\gamma} N) \Gamma = 0 \tag{4.5.64}$$

Wir wollen noch anmerken, daß die Inhomogenität der Callan-Symanzik-Gleichung auch beseitigt werden kann, indem man die Ableitung nach der Masse $m^2 \partial_{m^2}$ mit einer geeigneten Funktion multipliziert und addiert. Diese Form ist nützlich im Limes verschwindender Masse und für Normierungsbedingungen, die so gewählt sind, daß die Koeffizientenfunktionen α, β, γ massenunabhängig sind. Ein konkretes Beispiel hierfür liefert das Impulssubtraktionsschema mit Hilfsmasse, das wir im nächsten Abschnitt diskutieren.

4.5.4 Die Lowenstein-Zimmermann-Gleichung

Im Abschnitt 3.2.5 haben wir skizziert, wie UV-Divergenzen im Falle masseloser Felder beseitigt werden können. Das wichtigste Hilfsmittel war eine Hilfsmasse M(s-1), bei der die Variable *s* eine ganz ähnliche Rolle spielte wie ein Impuls. Ein Beleg dafür, daß Greensche Funktionen, die nach diesem Schema definiert worden sind, physikalisch sinnvoll sind, ist die Tatsache, daß sie bei s = 1 vom Hilfsparameter M nicht abhängen. Denn M ist, ganz ähnlich wie der Normierungspunkt κ^2 , ein unphysikalischer Parameter und daher sollten physikalische Größen M-unabhängig sein. Wir wollen für die masselose φ^4 -Theorie zeigen, daß die Vertexfunktionen an der Stelle s = 1 von M nicht abhängen.

Das Modell ist durch

$$\Gamma_{eff} = \left[\int (1+z)\Delta_1 + \Delta_2 + \hat{\lambda}\Delta_4 \right]_4^4$$
(4.5.65)

mit:

$$\Delta_{1} = \left[-\frac{1}{2} \int \partial \varphi \partial \varphi\right]_{4}^{4}$$

$$\Delta_{2} = \left[-\frac{1}{2}M^{2}(s-1)^{2} \int \varphi^{2}\right]_{4}^{4}$$

$$\Delta_{4} = \left[-\frac{1}{4!} \int \varphi^{4}\right]_{4}^{4}$$
(4.5.66)

die Waldformel (3.2.98) und die Normierungsbedingungen

$$\partial_{p^2} \Gamma_{\varphi\varphi}(p^2 = -\kappa^2)_{|_{s=1}} = 1$$
 (4.5.67)

$$\Gamma_{\varphi\varphi\varphi\varphi\varphi}(p=p_{sym})_{|_{s=1}} = -\lambda \tag{4.5.68}$$

definiert. Eine weitere Normierungsbedingung

$$\Gamma_{\varphi\varphi}(p=0,s=1)=0$$

ist eine Konsequenz der Subtraktionen und garantiert, daß φ masselos ist. Die *M*-Abhängigkeit läßt sich über das Wirkungsprinzip erfassen:

$$\begin{split} M\partial_{M}\Gamma &= & [M\partial_{M}\Gamma_{eff}]_{4}^{4} \cdot \Gamma = & [M\frac{\partial z}{\partial M}\Delta_{1} & +2\Delta_{2} & +M\frac{\partial \lambda}{\partial M}\Delta_{3}]_{4}^{4} \cdot \Gamma \\ \partial_{\lambda}\Gamma &= & [& \partial_{\lambda}\Gamma_{eff}]_{4} \cdot \Gamma = & [\frac{\partial z}{\partial \lambda}\Delta_{1} & & +\frac{\partial \lambda}{\partial \lambda}\Delta_{4}]_{4}^{4} \cdot \Gamma \\ N\Gamma &= & [& N \ \Gamma_{eff}]_{4} \cdot \Gamma = & [2(1+z)\Delta_{1} & +2\Delta_{2} & +4\lambda\Delta_{4}]_{4} \cdot \Gamma \\ M(s-1)\Delta'_{m}\Gamma &= & = & [u'\Delta_{1} & +(1+q)\Delta_{2} & +v\Delta_{4}]_{4} \cdot \Gamma \\ (4.5.69) \end{split}$$

mit

$$\Delta'_{m} = \left[\frac{1}{2} \int M(s-1)\varphi^{2}\right]_{3}^{3}$$

Da die Einsetzung $[\frac{1}{2}\varphi^2]_2^2$ nicht integriert werden kann, bewerkstelligen wir hier den Übergang von der harten Einsetzung Δ_2 zu einer weichen, indem wir Δ'_m wie angegeben definieren. Δ'_m ist eine $[\ldots]_3^3$ -Einsetzung, die einmal eingesetzt existiert. $M(s-1)\Delta'_m \cdot \Gamma$ verschwindet für s = 1, so daß der masselose Limes realisiert wird. Wir kombinieren zu

$$(M\partial_M + \beta^M \partial_\lambda - \gamma^M N)\Gamma = 2\alpha'_M M(s-1)\Delta'_m \cdot \Gamma$$
(4.5.70)

Das ist gewiß möglich, denn die Gleichungen

$$\frac{\partial z}{\partial M} + \beta^{M} \frac{\partial z}{\partial \lambda} - 2\gamma^{M} (1+z) - 2\alpha'_{M} u' = 0$$

$$2 - 2\gamma^{M} - 2\alpha'_{m} (1+q) = 0$$

$$\frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial M} + \beta^{M} \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \lambda} - 4\gamma^{M} - 2\alpha'_{M} v' = 0$$
(4.5.71)

haben in der klassischen Näherung die Lösung

D.

$$\gamma^{M(o)} = 0 \quad \alpha_M^{(o)} = 1 \quad \beta^{M(o)} = 0$$
(4.5.72)

Wir können die Koeffizienten $\beta^M, \gamma^M, \alpha'_M$ jedoch auch direkt durch Test auf den Normierungsbedingungen bestimmen. Differenzieren wir (4.5.70) nach p^2 und benutzen (4.5.67), so erhalten wir

$$-2\gamma^M = 0 (4.5.73)$$

Wählen wir für die 4-Punkt-Funktion in (4.5.70) den symmetrischen Impulspunkt und setzen (4.5.68) ein, so ergibt sich

$$-\beta^M - 4\gamma^M = 0. (4.5.74)$$

h.
$$\beta^M = \gamma^M = 0.$$
 (4.5.75)

Das ist aber bereits das Ergebnis, das wir finden wollen: an der Stelle s = 1 gilt

$$M\partial_M \Gamma_{|_{s=1}} = 0. \tag{4.5.76}$$

Hiermit läßt sich nun auch zeigen, daß die Koeffizientenfunktionen β, γ, α in der Callan-Symanzik-Gleichung

$$(\kappa \partial_{\kappa} + M \partial_M + \beta \partial_{\lambda} - \gamma N)\Gamma = \alpha_M M(s-1)\Delta'_M \cdot \Gamma$$
(4.5.77)

massenunabhängig sind, wenn als Normierungsbedingungen (4.5.67) und (4.5.68) gewählt werden. Man wendet $M\partial_M$ auf (4.5.77) an und geht an die Stelle s = 1. Es ergibt sich

$$(M\partial_M\beta\partial_\lambda - M\partial_M\gamma N)\Gamma\Big|_{\beta} = 0 \tag{4.5.78}$$

und hieraus mit der Hilfe von (4.5.67), (4.5.68)

$$M\partial_M\beta = M\partial_M\gamma = 0 \tag{4.5.79}$$

D.h. aber aus Dimensionsgründen

$$\beta = \beta(\lambda, \frac{M}{\kappa}) = \beta(\lambda) \tag{4.5.80}$$

$$\gamma = \gamma(\lambda, \frac{M}{\kappa}) = \gamma(\lambda) \tag{4.5.81}$$

Die Massenunabhängigkeit von α_M folgt aus dem Analogon zu (4.5.9) für α_M .

4.6 Bibliographische Angaben

Die relevanten Originalarbeiten für das Wirkungsprinzip, wie es hier vorgestellt wird, sind Lam 72 und Lowenstein 71. Wir folgen zunächst weitgehend der Vorlesung Lowenstein (Maryland), übernehmen dann aber für die Herleitung der Ward-Identitäten die "algebraische Methode", die von Piguet 74 und BRS entwickelt worden ist. Für nicht-lineare Transformationen ist sie zusammengefaßt in Breitenlohner/Maison/Sibold. Die Behandlung der QED findet man im wesentlichen in Piguet I.

Kapitel 5 Spontane Symmetriebrechung I

Dieses Kapitel wird erst in einer späteren Version enthalten sein.

Teil II

Nicht-abelsche Eichtransformationen

Kapitel 6

Nicht-abelsche Eichtheorien

6.1 Transformationsgesetze, Invarianten

Um die nicht-Abelsche Verallgemeinerung der Transformation und der Kopplung von Vektorfeldern zu finden, wollen wir – etwas heuristisch – folgendermaßen vorgehen. Wir betrachten N (Dirac-) Spinoren, die sich unter starren Transformationen infinitesimal gemäß

$$\delta_{\omega}\psi_{a} = i\omega^{k}T_{ab}^{k}\psi_{b} \qquad \begin{array}{c} k = 1, \dots, K\\ a, b = 1, \dots, N \end{array}$$
(6.1.1)

transformieren. Hierbei sind die ω^k die infinitesimalen Parameter. Die Hermiteschen Matrizen T^k sollen die Vertauschungsrelationen

$$[T^k, T^l] = i \ f^{klj} T^j \tag{6.1.2}$$

erfüllen und damit eine unitäre Darstellung einer kompakten, einfachen Lie-Gruppe G erzeugen. Die Gruppe G (genauer: ihre Algebra) ist charakterisiert durch die Strukturkonstanten f^{klj} , die insbesondere selbst gemäß

$$(D^k)_{ab} := i \ f_a{}^k{}_b \tag{6.1.3}$$

eine Darstellung bilden: die adjungierte.

Wenn reelle Zahlen f^{klj} gegeben sind, die vollständig anti-symmetrisch in klj sind und die Jacobi-Identität

$$f_l{}^j{}_m f_m{}^k{}_n + f_j{}^k{}_m f_m{}^l{}_n + f_k{}^l{}_m f_m{}^j{}_n = 0 aga{6.1.4}$$

erfüllen, dann können sie als Strukturkonstanten einer Lie-Algebra verstanden werden. (Die Identität (6.1.4) entsteht aus der Jacobi-Identität für Matrizen einer Darstellung.)

Die zu ψ_a adjungierten Spinoren $\bar{\psi}_a = \psi_a^{\dagger} \gamma^o$ transformieren sich als Folge von (6.1.1) gemäß

$$\delta_{\omega}\bar{\psi}_a = -i \;\omega^k T^{k*}_{ab}\bar{\psi}_b = -i \;\omega^k \bar{\psi}_b T^k_{ba}. \tag{6.1.5}$$

Damit sind also die bilinearen Kombinationen

$$\mathcal{L}_{o}^{F} = i\bar{\psi}_{a}\partial\!\!\!/\psi_{a} - M\bar{\psi}_{a}\psi_{a} \tag{6.1.6}$$

invariant unter den starren Transformationen.

Zur Ankopplung von Vektorfeldern A^k_μ und ihrem Transformationsgesetz gelangen wir nun, indem wir fordern, daß \mathcal{L}^F_0 so erweitert wird, daß es auch noch invariant bleibt, wenn die Parameter ω^k ortsabhängig werden

$$\omega^k = \omega^k(x). \tag{6.1.7}$$

Damit gleichbedeutend ist die Forderung, daß sich die kovariante Ableitung

$$D_{\mu}\psi_a := (\partial_{\mu} - i t^k_{ab} A^k_{\mu})\psi_b \tag{6.1.8}$$

genauso transformiert wie das Feld ψ_a

$$\delta_{\omega(x)}(D_{\mu}\psi_a) = i \;\omega^k(x)T^k_{ab}(D_{\mu}\psi)_b. \tag{6.1.9}$$

(Die Größen t^k und die Transformation von A^k_μ sind zu finden.) Die linke Seite dieser Gleichung lautet ausgeschrieben

$$i\partial_{\mu}\omega^{k}T^{k}\psi + i\omega^{k}T^{k}\partial_{\mu}\psi - it^{k}\delta A^{k}_{\mu}\psi + (-i)t^{k}A^{k}_{\mu}i\omega^{l}T^{l}\psi, \qquad (6.1.10)$$

während die rechte Seite durch

$$i\omega^k T^k \partial_\mu \psi + i\omega^k T^k (-i) t^l A^l_\mu \psi \tag{6.1.11}$$

gegeben ist. Setzen wir $t^k = T^k$ und lassen δA^k_μ mit

$$\delta A^k_\mu = \partial_\mu \omega^k + \dots \tag{6.1.12}$$

beginnen, so muß nur noch der zweite Summand in (6.1.11) durch einen in A^k_μ homogenen Beitrag zu δA^k_μ kompensiert werden. Mit Hilfe von (6.1.2) sieht man, daß die vollständige Transformation von A^k_μ

$$\delta A^k_\mu = \partial_\mu \omega^k - f^{klj} \omega^l A^j_\mu \tag{6.1.13}$$

lautet. Bevor wir diese Ergebnisse zusammenfassen, wollen wir noch eine bequemere Schreibweise einführen. Die Matrizen τ^k mögen die fundamentale Darstellung von G erzeugen

$$[\tau^k, \tau^l] = i \ f^{klj} \tau^j \tag{6.1.14}$$

und normiert sein gemäß

$$Tr(\tau^k \tau^l) = \delta^{kl}, \tag{6.1.15}$$

dann definieren wir

$$A_{\mu} := A_{\mu}^{k} \tau^{k} \quad , \quad \omega := \omega^{k} \tau^{k} \tag{6.1.16}$$

(Umkehrung: $A^k_{\mu} = Tr(\tau^k A_{\mu}), \omega^k = Tr(\tau^k \omega)$). Hiermit läßt sich die Transformation der Vektorfelder als

$$\delta A_{\mu} = \partial_{\mu}\omega + i[\omega, A_{\mu}] \tag{6.1.17}$$

schreiben. Als invariante Lagrangefunktion hat sich ergeben

$$\mathcal{L}^F = i\bar{\psi}_a D_\mu \gamma^\mu \psi - M\bar{\psi}_a \psi_a \tag{6.1.18}$$

$$D_{\mu} \equiv \partial_{\mu} - iT^k A^k_{\mu} \tag{6.1.19}$$

Dieses Konstruktionsprinzip für kovariante Ableitungen läßt sich natürlich auch für skalare Felder anwenden. Wir ordnen die reell geschriebenen skalaren Felder in einem Vektor $\mathbf{\Phi}$ an, setzen voraus, daß sie sich unter starren Transformationen ebenfalls gemäß einer Darstellung \hat{T} transformieren

$$\delta_{\omega} \mathbf{\Phi} = \omega^k \hat{T}^k \mathbf{\Phi} \tag{6.1.20}$$

und finden als kovariante Ableitung

$$D_{\mu} \mathbf{\Phi} = (\partial_{\mu} - \hat{T}^k A^k_{\mu}) \mathbf{\Phi}. \tag{6.1.21}$$

(Für reelle Felder sind die \hat{T}^k reell und anti-symmetrisch zu wählen.) Eine konventionell normierte invariante Lagrangefunktion lautet dann

$$\mathcal{L}^B = \frac{1}{2} D_\mu \Phi D^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi \Phi \qquad (6.1.22)$$

Es ist nun offensichtlich, daß folgende Verallgemeinerung gilt: *alle* Feldpolynome, die aus Materiefeldern und deren kovarianten Ableitungen aufgebaut sind, sind automatisch invariant unter lokalen Eichtransformationen, wenn sie unter starren Eichtransformationen invariant sind.

Zur Vervollständigung des Systems der Invarianten wollen wir schließlich noch eine angeben, die eine freie Lagrangefunktion für die Vektorfelder A^k_{μ} enthält. Der Feldstärkentensor der Abelschen Näherung

$$F^k_{\mu\nu} = \partial_\mu A^k_\nu - \partial_\nu A^k_\mu \tag{6.1.23}$$

muß erweitert werden um Beiträge derselben Dimension, die sich ebenfalls unter der adjungierten Darstellung transformieren. Eine kleine Rechnung ergibt, daß sich

$$F_{\mu\nu} := F_{\mu\nu}^{k} \tau^{k} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} - i[A_{\mu}, A_{\nu}]$$
(6.1.24)

unter lokalen Eichtransformationen kovariant transformiert

$$\delta_{\omega(x)} F_{\mu\nu} = i[\omega(x), F_{\mu\nu}].$$
 (6.1.25)

Damit folgt für $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$:

$$\delta_{\omega(x)}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = i[\omega(x), F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}]$$
(6.1.26)

und

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} Tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \tag{6.1.27}$$

ist eine Invariante.

Die allgemeinste invariante Lagrangefunktion läßt sich also als Summe

$$\mathcal{L}_{inv} = \frac{1}{g^2} \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}^F + \mathcal{L}^B + \mathcal{L}(\psi, \Phi)$$
(6.1.28)

angeben. Hierbei enthält $\mathcal{L}(\psi, \Phi)$ alle Invarianten (starr invariant = lokal invariant) die sich aus den Feldern ψ_a und Φ ohne Ableitungen konstruieren lassen.

6.2 Ward-Identitäten

Es erweist sich als zweckmäßig, die Symmetrie eines Modells über seine *Wirkung* zu formulieren: Zum einen ist die Invarianz einer Wirkung etwas allgemeiner als die einer Lagrangefunktion, zum anderen läßt sich die klassische Wirkung als erster Term in einer systematischen Entwicklung der quantisierten Theorie interpretieren.

Wir definieren also

$$\Gamma_{inv} = \int dx \mathcal{L}_{inv} \tag{6.2.1}$$

 $(dx \equiv d^4x, \mathcal{L}_{inv} \text{ aus } (6.1.28))$

und wollen die Invarianz von Γ_{inv} unter den lokalen Eichtransformationen formulieren. Hierzu führen wir den funktionalen Differentialoperator w^k ein:

$$w^{k}\Gamma \equiv -\partial_{\mu}\frac{\delta\Gamma}{\delta A^{k}_{\mu}(x)} - f^{klm}A^{l}_{\mu}(x)\frac{\delta\Gamma}{\delta A^{m}_{\mu}(x)} + \frac{\Gamma}{\delta\psi_{a}(x)}iT^{k}_{ab}\psi_{b}(x) - i\bar{\psi}_{b}(x)T^{k}_{ba}\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}_{a}(x)} + \varphi_{s}(x)\hat{T}^{k}_{rs}\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_{r}(x)}$$

$$(6.2.2)$$

(Die Pfeile auf den Spinorableitungen geben an, daß die Ableitung nach links bzw. nach rechts wirkt: so werden die Vorzeichen bei der Antikommunikation von

6.2. WARD-IDENTITÄTEN

spinoriellen Größen berücksichtigt.) Die Invarianz von Γ_{inv} ist dann ausgedrückt durch

$$w^k \Gamma_{inv} = 0. \tag{6.2.3}$$

Diese Gleichung folgt ohne zusätzliche Rechnung aus der oben bewiesenen Invarianz, wenn man benutzt, daß für alle Felder die "naive" Transformation aus der funktionalen gewonnen werden kann, z.B.:

$$\varphi_s \hat{T}_{rs} \frac{\delta}{\delta \varphi_r(x)} \int dz \varphi_t(z) = \varphi_s \hat{T}_{ts} = \delta \varphi_t.$$
(6.2.4)

Gleichung (6.2.3) heißt lokale Ward-Identität. Zur globalen oder zur Ward-Identität der starren Symmetrietransformationen gelangen wir durch Integration von (6.2.3) über die Raum-Zeit (und Multiplikation mit i):

$$W^{k} \equiv i \int dx \left(-f^{klm} A^{l}_{\mu}(x) \frac{\delta}{\delta A^{m}_{\mu}(x)} + \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi_{a}(x)} i T^{k}_{ab} \psi_{b}(x) - i \psi_{b}(x) T^{k}_{ba} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \overline{\psi}_{a}} \right)$$
$$+ \varphi_{s}(x) \hat{T}^{k}_{rs} \frac{\delta}{\delta \varphi_{r}}(x)$$
(6.2.5)

Die Invarianz von Γ_{inv} unter starren Symmetrie transformationen ($\omega(x) = const.$) wird durch

$$W^k \Gamma_{inv} = 0 \tag{6.2.6}$$

ausgedrückt. Zur Quantisierung von Eichtheorien ist es notwendig, die Eichung zu fixieren: nur dann läßt sich der im Vektorfeld bilineare Teil von Γ_{YM} invertieren. Wir addieren also zu Γ_{inv} einen Term $\Gamma_{q.f.}$

$$\Gamma = \Gamma_{inv} + \Gamma_{g.f.},\tag{6.2.7}$$

$$\Gamma_{g.f.} = -\frac{1}{2\alpha} Tr \int (\partial_{\mu} A^{\mu})^2, \qquad (6.2.8)$$

der zwar starr invariant ist, aber die lokale Eichinvarianz verletzt:

$$\tau^k w^k(x) \Gamma = -\frac{1}{\alpha} (\Box \partial A - i[A^{\mu}, \partial_{\mu} \partial_{\lambda} A^{\lambda}])$$
(6.2.9)

In der Abelschen Theorie verschwindet der zweite Term auf der rechten Seite; wir haben früher gezeigt (Abschnitt 4.4), daß ∂A ein freies Feld ist und damit die Unitarität der QED bewiesen werden kann. Hier, im nicht-Abelschen Fall, trägt der zweite Term bei: ∂A ist i.a. ein wechselwirkendes Feld, die Unitarität kann nicht in einfacher Weise aus der Ward-Identität gefolgert werden. Dies schränkt ihre Brauchbarkeit ganz erheblich ein.

6.3 Beispiele

Relevant für die derzeit phänomenologisch erfolgreiche Beschreibung der Teilchenphysik ist das sogenannte Standard-Modell, dessen Eichgruppen und Feldinhalt wir als Beispiel anführen wollen.

Eichgruppe SU(3)

Die fundamentale Darstellung der SU(3) wird erzeugt von 8 Hermiteschen Matrizen, für die eine übliche Basiswahl die folgende ist:

$$T^{i} = \frac{1}{2}\lambda^{i} \qquad i = 1, \dots, 8 \qquad [T^{i}, T^{j}] = if^{ijk}T^{k} \qquad (6.3.1)$$
$$\lambda^{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda^{2} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda^{3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\lambda^{4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda^{5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (6.3.2)$$
$$\lambda^{6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda^{7} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda^{8} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften:

$$Tr(\lambda^{i}) = 0 \qquad Tr(\lambda^{i}\lambda^{j}) = 2\delta^{ij} \qquad \{\lambda^{i}, \lambda^{j}\} = \frac{4}{3}\delta^{ij}\mathbf{1} + 2d^{ijk}\lambda^{k} \qquad (6.3.3)$$

Die von Null verschiedenen Strukturkonstanten f_{abc} von SU(3) lauten

$$f_{123} = 1, f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = \frac{1}{2},$$

$$f_{458} = f_{678} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$
(6.3.4)

 f^{ijk} ist vollständig antisymmetrisch. Die von Null verschiedenen d^{ijk} lauten

$$d_{118} = d_{228} = d_{338} = -2d_{448} = -2d_{558} = -2d_{668}$$

= $-2d_{778} = -d_{888} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$$d_{146} = d_{157} = -d_{247} = d_{256} = d_{344} = d_{355}$$

= $-d_{366} = -d_{377} = \frac{1}{2}$ (6.3.5)

6.3. BEISPIELE

 d^{ijk} ist vollständig symmetrisch. Als Materie wählen wir 3F Dirac-Spinoren, die wir für jedes a in einem Vektor anordnen:

$$q^{(a)} = \begin{pmatrix} q_1^{(a)} \\ q_2^{(a)} \\ q_3^{(a)} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} r^{(a)} \\ g^{(a)} \\ b^{(a)} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} Farb-Triplett \\ a = 1, \dots, F \end{array}$$
(6.3.6)

Sie transformieren sich gemäß

$$\delta_{\omega}q^{(a)} = ig_3 \frac{\lambda^k}{2} \omega^k q^{(a)} \tag{6.3.7}$$

Die Zahl F gibt die Anzahl von "Düften" (engl.: flavours, frz.: parfums) an, in denen die Quarks $q^{()}$ vorkommen:

 $q^{(a)}: a = \mathbf{u}p, \mathbf{d}own, \mathbf{c}harm, \mathbf{s}trange, \mathbf{t}op, \mathbf{b}ottom, \dots$?

Die Vektorfelder, die zur lokalen Eichgruppe SU(3) gehören, bezeichnet man als Gluonen (auf deutsch vielleicht: "Leimchen"). Eine invariante Lagrange-Funktion ist durch

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{k}_{\mu\nu} F^{k\mu\nu} + i \sum_{a=1}^{F} \bar{q}^{(a)} D_{\mu} \gamma^{\mu} q^{(a)} - \mathcal{L}_{m}$$
(6.3.8)

$$F_{\mu\nu}^{k} \equiv \partial_{\mu}A_{\nu}^{k} - \partial_{\nu}A_{\mu}^{k} - ig_{3}[A_{\mu}, A_{\nu}]^{k}$$
(6.3.9)

$$D_{\mu} \equiv \partial_{\mu} - ig_3 \frac{\lambda^{\kappa}}{2} A^k_{\mu} \tag{6.3.10}$$

$$\mathcal{L}_m = m_{ab} \bar{q}_k^{(b)} q_k^{(a)} \tag{6.3.11}$$

gegeben. (Gegenüber (6.1.28) haben wir eine Änderung der Normierung vorgenommen: $A_{\mu} \to g_3 A_{\mu}$.)

Der Massenterm \mathcal{L}_m ist farbinvariant. Er wird erst durch die weiteren Symmetrien des Standard-Modells verboten werden. Diese Eichtheorie heißt Quantenchromodynamik (QCD). Sie beschreibt die starke Wechselwirkung der Quarks und Gluonen. Experimentell sind bisher nur Farb-Singuletts beobachtet worden, woraus für die Theorie die Aufgabe erwächst, den sogen. permanenten Quark-Einschluß (engl. confinement) aus der QCD herzuleiten. Diese Aufgabe ist bisher nicht befriedigend gelöst.

Eichgruppe $SU(2) \times U(1)$

Wir wollen zunächst den *leptonischen* Sektor dieser Eichtheorie (*elektro-schwache* Theorie) betrachten. Ausgangspunkt für die Formulierung war der phänomenologische Erfolg der effektiven Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J^{\dagger}_{\lambda} J^{\lambda} + \text{h.c.}, \qquad (6.3.12)$$

wobei

$$J_{\lambda}^{(lep)} = \bar{\nu}_e \gamma_{\lambda} (1 - \gamma_5) e + \bar{\nu}_{\mu} \gamma_{\lambda} (1 - \gamma_5) \mu \qquad (6.3.13)$$

und hiermit z.B. der μ -Zerfall $\mu \to e + \bar{\nu}_e + \nu_{\mu}$ in guter Näherung beschrieben wird. D.h. beobachtbar ist der geladene schwache Strom

$$J_w^{(-)} = \bar{e}_L \gamma^\lambda \nu_L \tag{6.3.14}$$

sowie sein konjugierter Partner

$$J_w^{(+)\lambda} = \bar{\nu}_L \gamma^\lambda e_L \tag{6.3.15}$$

(hier geschrieben für ein Lepton und sein zugehöriges Neutrino). Ebenso beobachtbar ist der *elektromagnetische* ungeladene Strom

$$J_{em}^{\lambda} = \bar{\psi}_e \gamma^{\lambda} \psi_e = \bar{e}_R \gamma^{\lambda} e_R + \bar{e}_L \gamma^{\lambda} e_L.$$
(6.3.16)

Hier haben wir den Dirac-Spinor ψ_e zerlegt in rechts- und linkshändige Anteile

$$e_{L}^{R} = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_{5}) \psi_{e} \tag{6.3.17}$$

$$\bar{e}_L \equiv e_L^{\dagger} \gamma^o = \psi_e^{\dagger} \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \gamma^o = \bar{\psi}_e \frac{1}{2} (1 + \gamma_5)$$
(6.3.18)

$$\gamma_5^2 = \mathbf{1}, \gamma_5^{\dagger} = \gamma_5, \gamma_5 = i\gamma^o\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{6.3.19}$$

Projektoreigenschaft:
$$\gamma_{\pm} \equiv \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5) : \gamma_{\pm}^2 = \gamma_{\pm}, \gamma_+ + \gamma_- = \mathbf{1}$$
 (6.3.20)

Diese Zerlegung wird nahegelegt von der Vektor-Axialvektor-Form des Stromes (6.3.13), mit dem zusammen der elektromagnetische Strom eine größere Struktur aufspannen soll. Wir fassen ein Neutrino und sein linkshändiges Lepton zu einem Dublett zusammen:

$$L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \tag{6.3.21}$$

und schreiben dann mit Hilfe von

$$\tau_{3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \tau_{-} = \frac{1}{2}(\tau_{1} - i\tau_{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tau_{+} = \frac{1}{2}(\tau_{1} + i\tau_{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
(6.3.22)

$$J_{em}^{\lambda} = \bar{e}_R \gamma^{\lambda} e_R + \bar{L} \gamma^{\lambda} \frac{1}{2} (1 - \tau_3) L \qquad (6.3.23)$$

$$J_w^{(-1)\lambda} = \bar{L}\gamma^\lambda \tau_- L \tag{6.3.24}$$

$$J_w^{(+)\lambda} = \bar{L}\gamma^\lambda \tau_+ L \tag{6.3.25}$$

158

Damit sind diese Ströme aber gerade Linearkombinationen von $SU(2) \times U(1)$ Strömen

$$\underline{J}^{\lambda} = \frac{1}{2} \bar{L} \gamma^{\lambda} \underline{\tau} L \tag{6.3.26}$$

$$J^{\lambda} = \frac{1}{2}\bar{L}\gamma^{\lambda}L + \bar{e}_R\gamma^{\lambda}e_R \tag{6.3.27}$$

Sie gehören zu den folgenden Symmetrietransformationen auf den Feldern

$$\delta_{\omega}L = \frac{i}{2}\underline{\tau} \cdot \underline{\omega}g_2L + i\theta g_1 y_L L \tag{6.3.28}$$

$$\delta \ e_R = i\theta g_1 y_R e_R \tag{6.3.29}$$

$$y_L = -\frac{1}{2}$$
 , $y_R = -1$ (6.3.30)

D.h. L ist ein SU(2)-Dublett (schwacher Isospin), mit den folgenden Quantenzahlen

$$T_3(\nu_L) = +\frac{1}{2} \qquad Q(\nu_L) = 0$$
 (6.3.31)

$$T_3(e_L) = -\frac{1}{2}$$
 $Q(e_L) = -1$ (6.3.32)

 $(T_3: \text{ dritte Komponente des schwachen Isospins, } Q : elektrische Ladung \leftarrow U(1)).$ Auf beiden Komponenten gilt

$$(Q - T_3)(\nu_e) = -\frac{1}{2} = (Q - T_3)(e_L)$$
(6.3.33)

Die Quantenzahl Y

$$Y := Q - T_3 \tag{6.3.34}$$

ist die schwache Hyperladung.

Auf dem rechtshändigen Anteil des Leptons gilt

$$T_3(e_R) = 0, \quad Q(e_R) = -1,$$
 (6.3.35)

Also auch hier gilt (6.3.34).

Die Verallgemeinerung dieser Zuordnung von Multiplettstruktur und Quantenzahlen führt zum Standard-Modell: die linkshändigen Anteile der Leptonen bilden mit den jeweiligen Neutrinos SU(2)-Dubletts, die rechtshändigen Teile der Leptonen Singuletts, während rechtshändige Neutrinos nicht auftreten. Damit ist die Parität per constructionem gebrochen und die SU(2)-Symmetrie hat chiralen Charakter: Der Massenterm

$$\bar{e}e = \bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L \tag{6.3.36}$$

ist nicht invariant: $\theta = 0, \, \underline{\omega} \neq 0$

$$\delta_{\omega}(\bar{e}e) = \frac{i}{2}g_2 \Big[(-\omega_3\bar{e}_L + (\omega_1 - i\omega_2)\bar{\nu}_L)e_R + \bar{e}_R((\omega_1 + i\omega_2)\nu_L - \omega_3e_L) \Big]$$
(6.3.37)
 $\neq 0$

Die Massen der Leptonen und Neutrinos sind Null, solange die $SU(2) \times U(1)$ -Symmetrie nicht gebrochen ist.

TABELLE (T.6.3)

Die Quantenzahlen der Fermionen in der elektroschwachen Theorie

$$SU(2) \times U(1)$$

	t_3	y	$q = t_3 + y$
$(u_e, u_\mu, u_ au)_L$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$(e, \mu, \tau)_L$	$-\frac{\overline{1}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1
$(u, c, t)_L$	$+\frac{\overline{1}}{2}$	$+\frac{\overline{1}}{6}$	$+\frac{2}{3}$
$(d, s, b)_L$	$-\frac{\overline{1}}{2}$	$+\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$
$(e, \mu, \tau)_R$	0	-1	-1
$(u, c, t)_R$	0	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{2}{3}$
$(d, s, b)_R$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
		0	0

Nach diesen Darlegungen ist es nicht schwierig, auch die nicht-leptonischen Sektoren entsprechend zu ergänzen. Für die *elektro-schwache* Wechselwirkung der *Quarks* bildet man ebenfalls Dubletts von linkshändigen Anteilen und Singuletts von rechtshändigen: $\binom{u}{d}_L$, u_R , d_R unter SU(2), erlaubt aber jetzt für beide linkshändigen Partner im Dublett das Auftreten der rechtshändigen. Die Quarks sind also im Symmetrielimes ebenfalls masselos: \mathcal{L}_m (6.3.22) ist durch die SU(2)-Invarianz verboten. Insgesamt ergibt sich die Familienstruktur

$$e - \text{Fam.} \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \quad e_R, u_R, d_R \\ \mu - \text{Fam.} \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L \quad \mu_R, c_R, s_R \\ \tau - \text{Fam.} \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L \quad \tau_R, t_R, b_R$$

(Die Quarks bilden Farbtripletts, s.o. (6.3.6).) Das Top-Quark ist bisher (Okt. 1990) noch nicht gefunden worden. Die Quantenzahlen sind in der Tabelle (T.6.3) zusammengefaßt.

Das Transformationsgesetz lautet:

$$\delta \psi = \frac{i}{2} g_2 \underline{\omega} \cdot \underline{\tau} \psi + i g_1 \theta y(\psi) \psi \qquad \text{für ein Dublett } \psi, \qquad (6.3.38)$$

$$\delta \psi = i g_1 \theta y(\psi) \psi \qquad \text{für ein Singulett } \psi. \qquad (6.3.39)$$

6.4. BIBLIOGRAPHISCHE ANGABEN

Die Eichfelder, die zur SU(2)-Gruppe gehören, bezeichnen wir mit A^k_{μ} k = 1, 2, 3; die der U(1) mit B_{μ} . Sie haben dann als invariante Lagrangefunktion die übliche (6.1.27) und für Dubletts bzw. Singuletts sind die folgenden kovarianten Ableitungen zu verwenden:

$$D_{\mu}\psi = (\partial_{\mu} - \frac{i}{2}g_{2}\underline{\tau} \cdot \underline{A}_{\mu} - ig_{1}y(\psi)B_{\mu})\psi \qquad \psi \text{ Dublett} , \qquad (6.3.40)$$

$$D_{\mu}\psi = (\partial_{\mu} - ig_1 y(\psi) B_{\mu})\psi \qquad \qquad \psi \text{ Singulett} . \tag{6.3.41}$$

Die symmetrische Theorie hat Schwierigkeiten mit der unmittelbaren phänomenologischen Anwendung: die (direkt beobachtbaren) Leptonen sind massiv, die (indirekt beobachteten) Quarks ebenfalls. Die effektive Vier-Fermion-Wechselwirkung (6.3.12) läßt sich nur mit massiven Vektorteilchen reproduzieren:

se sind. Alle diese Massen können erzeugt werden durch spontane Symmetriebrechung. Bevor wir uns jedoch diesem Problemkreis zuwenden, wollen wir eine Umformulierung der symmetrischen Theorie studieren, die dann auch erlauben wird, das Unitaritätsproblem in massiven Vektortheorien zu lösen.

6.4 Bibliographische Angaben

Das Standard-Modell wird verständlicherweise in zahlreichen Büchern abgehandelt. Wir stützen uns auf eine Vorlesung von Clark (Lafayette).

Kapitel 7

BRS-Transformationen und Slavnov-Identität

7.1 BRS-Transformationen

Das Kernproblem, das man zu lösen hat, um nicht-Abelsche Eichmodelle von Modellen zu Theorien zu befördern, ist der Beweis der Unitarität. Der erste Schritt in diese Richtung war die Einführung der Faddeev-Popov-($\Phi\Pi$)-Geister, dann ihr systematischer Gebrauch in der Slavnov-Identität. Diese wiederum erwies sich als Identität, die eine Symmetrie ausdrückt: die Invarianz unter Becchi-Rouet-Stora-Transformationen. Bei deren genauerer Analyse stellte sich heraus, daß sie neben diesem feldtheoretischen Aspekt auch in einem rein algebraischen Aspekt außerordentlich fruchtbar sind: sie charakterisieren nämlich in eleganter Weise die algebraische Struktur von Transformationen unter Lie-Gruppen. Wir beginnen deswegen unsere Darstellung mit dieser Seite des Problems.

7.1.1 Algebraischer Aspekt

Wir betrachten einen Satz (komplexer) skalarer Felder φ_a und definieren auf ihnen eine Transformation

$$s\varphi_a = i \ c_+^k T_{ab}^k \varphi_b \tag{7.1.1}$$

mit Parametern c^k_+ und Zahlen T^k_{ab} . Die Wiederholung dieser Transformation ergibt

$$s^2 \varphi_a = isc_+^k T_{ab}^k \varphi_b + \varepsilon ic_+^k T_{ab}^k ic_+^l T_{bc}^l \varphi_c \tag{7.1.2}$$

Dabei haben wir uns vorbehalten, daß sich die "Parameter" c_{+}^{k} ebenfalls transformieren und mit $\varepsilon = \pm 1$ die Wahl offengelassen, ob s mit c_{+}^{k} kommutiert oder antikommutiert. Der zweite Summand in (7.1.2) suggeriert die Regel

(R1)
$$c_{+}^{k}c_{+}^{l} = -c_{+}^{l}c_{+}^{k},$$
 (7.1.3)

denn dann entsteht der Kommutator $[T^k, T^l]$:

$$s^2 \varphi_a = i s c^k_+ T^k_{ab} \varphi_b - \frac{1}{2} \varepsilon c^k_+ c^l_+ [T^k, T^l]_{ab} \varphi_b, \qquad (7.1.4)$$

der ja algebraisch ausgezeichnet ist; wenn nämlich die T^k Erzeugende der Darstellung einer Gruppe auf φ_a sind, dann gilt

$$[T^k, T^l] = i \ f^{klm} T^m \tag{7.1.5}$$

und damit

$$s^{2}\varphi_{a} = i(sc_{+}^{m} - \varepsilon \frac{1}{2}f^{mkl}c_{+}^{k}c_{+}^{l})T_{ab}^{m}\varphi_{b}$$
(7.1.6)

Wenn wir also c^m_+ gemäß

$$sc_{+}^{m} = \varepsilon \frac{1}{2} f^{mkl} c_{+}^{k} c_{+}^{l}$$
 (7.1.7)

transformieren, erhalten wir

$$s^2 \varphi_a = 0, \tag{7.1.8}$$

s ist nilpotent auf φ_a .

Ein etwas allgemeinerer Ansatz für das Transformationsgesetz von c^m_+ ist demnach

$$sc_{+}^{m} = x^{m[kl]}c_{+}^{k}c_{+}^{l}, (7.1.9)$$

wobei die eckigen Klammern [kl] andeuten, daß x – in Übereinstimmung mit Regel (R1) – in kl antisymmetrisch ist. Wir führen nun auch auf c^m_+ die Transformation s ein zweites Mal aus.

$$s^{2}c_{+}^{m} = x^{m[kl]}x^{k[no]}c_{+}^{n}c_{+}^{o}c_{+}^{l} + \varepsilon x^{m[kl]}c_{+}^{k}x^{l[pq]}c_{+}^{p}c_{+}^{q}$$

= $(x^{m[kl]}x^{k[no]} + \varepsilon x^{m[nk]}x^{k[ol]})c_{+}^{n}c_{+}^{o}c_{+}^{l}$ (7.1.10)

Wegen Regel (R1) antisymmetrisieren wir vollständig:

$$s^{2}c_{+}^{m} = \frac{1}{3} \Big[\Big(x^{m[kl]} x^{k[no]} + x^{m[kn]} x^{k[ol]} + x^{m[ko]} x^{k[ln]} \Big) \\ + \varepsilon \Big(x^{m[nk]} x^{k[ol]} + x^{m[ok]} x^{k[ln]} + x^{m[lk]} x^{k[no]} \Big) \Big] c_{+}^{n} c_{+}^{o} c_{+}^{l}$$

$$= \frac{1}{3} (1 - \varepsilon) \Big(x^{m[kl]} x^{k[no]} + x^{m[kn]} x^{k[ol]} + x^{m[ko]} x^{k[ln]} \Big) c_{+}^{n} c_{+}^{o} c_{+}^{l}$$
(7.1.11)

 $\begin{array}{ll} \mbox{Für} & \varepsilon = +1 & \mbox{gilt} & s^2 c_+^m = 0 & \mbox{trivialerweise.} \\ \mbox{Für} & \varepsilon = -1 & \mbox{folgt aus} & s^2 c_+^m = 0 \\ \end{array}$

$$x^{m[kl]}x^{k[no]} + x^{m[kn]}x^{k[ol]} + x^{m[ko]}x^{k[ln]} = 0.$$
(7.1.12)

Dies ist aber gerade die Jacobi-Identität, deren Lösungen

$$x^{m[kl]} = -\frac{1}{2}f^{mkl}, (7.1.13)$$

7.1. BRS-TRANSFORMATIONEN

die Lie-Algebren charakterisieren. Jede Wahl von f^{mkl} sagt dann, daß man mit der von diesen f's bestimmten Algebra arbeiten möchte. Wir fassen zusammen:

- $sc_{+}^{m} = x^{m[kl]}c_{+}^{k}c_{+}^{l}$ Resultat 1 : Der Ansatz
 - Der Ansatz $sc_{+}^{m} = x^{m[kl]}c_{+}^{k}c_{+}^{l}$ (7.1.14) c mit Regel(1) $c_{+}^{k}c_{+}^{l} = -c_{+}^{l}c_{+}^{k}$ (7.1.15) und Regel(2) $s(c_{+}g) = sc_{+}g c_{+}sg$ ($\varepsilon = -1$) (7.1.16) der Forderung $s^{2}c_{-}^{m} = 0$ (Nilpotenz von s) (7.1.17) führt mit $\operatorname{Regel}(1)$

and der Forderung
$$s^2 c^m_+ = 0$$
 (Nilpotenz von s) (7.1.17)

$$sc_{+}^{m} = -\frac{1}{2}f^{mkl}c_{+}^{k}c_{+}^{l}, \qquad (7.1.18)$$

wobei die f^{mkl} die Strukturkonstanten einer Lie-Algebra G sind.

zu

Resultat 2 : Der Ansatz
$$s\varphi_a = ic_+^k T_{ab}^k \varphi_b$$
 (7.1.19)

führt mit Regel (1), Regel (2) und der Forderung

 $s^2\varphi_a = 0$ (7.1.20)

zu

$$[T^k, T^l] = i f^{klm} T^m, (7.1.21)$$

d.h. die Matrizen T^k erzeugen eine Darstellung der Lie-Algebra G.

Wir wollen nun noch untersuchen, wie diese Transformation s (BRS-Transformation) auf den Vektorfeldern A^k_μ aussehen könnte. Hierzu ersehen wir aus (7.1.19), daß die "Parameter" c^k_+ wie Parameter von Eichtransformationen eingeführt sind, d.h.

$$sA^{k}_{\mu} = a^{kl}\partial_{\mu}c^{l}_{+} - b^{klm}c^{l}_{+}A^{m}_{\mu}$$
(7.1.22)

wäre ein analoger Ansatz.

Unter der Annahme, daß s mit ∂_{μ} vertauscht (Regel 3), führt die Wiederholung der Transformation nach kurzer Rechnung zu

$$s^{2}A_{\mu}^{k} = (a^{kl}f^{lno} + b^{kom}a^{mn})c_{+}^{o}\partial_{\mu}c_{+}^{n} + \frac{1}{2}(b^{klm}f^{lno} - b^{knr}b^{rom} + b^{kor}b^{rnm})c_{+}^{n}c_{+}^{o}A_{\mu}^{m}.$$
(7.1.23)

 $s^2 A^k_\mu = 0$

Die Forderung

kann erfüllt werden mit

$$b^{kom}a^{mn} = a^{kl}f^{lon} \tag{7.1.25}$$

Oder:

$$b^{k(o)m} = a^{kl} f^{lon} (a^{-1})^{nm}. ag{7.1.26}$$

D.h. die Matrix ib ist äquivalent zur adjungierten Darstellung, wobei die Äquivalenztransformation durch die Matrix a vermittelt wird. Damit ist auch der Koeffizient des zweiten Summanden in (7.1.23) Null.

Resultat 3: Die Forderung $s^2 A_{\mu} = 0$

(Nilpotenz von s) führt nach Äquivalenztransformation zu

$$sA_{\mu} = \partial_{\mu}c_{+} + i[c_{+}, A_{\mu}]$$
 (7.1.28)

(hier haben wir $c_+ \equiv \tau^k c_+^k$ geschrieben). Wir können diese Resultate folgendermaßen zusammenfassen:

Die Transformationsansätze (7.1.1, 7.1.9) und (7.1.22) sind die allgemeinsten, die verträglich sind mit Erhaltung der Dimension $(c_+$ wird mit Dimension Null gezählt), mit Zuordnung einer Ladung $(\phi \pi$ -Ladung) +1 für c_+ und Erhöhung der $\phi \pi$ -Ladung um +1 durch s. Die Regeln (1), (2), (3) können dahingehend zusammengefaßt werden, daß s eine grassmannwertige Transformation ist: s antikommutiert mit sich selbst und mit c_+ (c_+ ist grassmannwertig, "fermionisch"), kommutiert aber mit allen bosonischen Größen. Mit diesen Ansätzen und Regeln als Voraussetzung folgt aus der Nilpotenz von s auf ϕ, c_+, A_{μ} s ist eine Eichtransformation auf ϕ und A_{μ} (mit Darstellungen T bzw. if)

die Eichgruppe G ist durch die Wahl der Strukturkonstanten f im Transformationsgesetz von c_+ festgelegt.

Etwas schlagwortartig formuliert: die Nilpotenz von s auf ϕ , c_+ und A impliziert alle algebraischen Aussagen der Eichtransformationen auf den elementaren Feldern.

7.1.2 Feldtheoretischer Aspekt

Die vorhergehende Zusammenfassung hat bereits die nächsten Schritte angedeutet: wir wollen c_+ jetzt als *Feld* auffassen, Invarianten konstruieren und dann auch im Bereich der Feldtheorie die Nilpotenz der *s* entsprechenden Operation auf der Wirkung Γ untersuchen.

Da s auf Materiefeldern φ_a, ψ und auf A_{μ} wie eine Eichtransformation aussieht, sind alle Eichinvarianten auch BRS-Invarianten. Gesucht sind jetzt Invarianten, die c_+ enthalten. Um sie zu finden, prüfen wir nach, wie s auf dem nicht-

7.1. BRS-TRANSFORMATIONEN

eichinvarianten Teil von Γ operiert. Wir betrachten zuerst die (α, B) -Eichung.

$$\Gamma_{g.f.} = Tr \int dx \left(\frac{\alpha}{2}B^2 + B\partial A\right) \tag{7.1.29}$$

$$s\Gamma_{g.f.} = Tr \int dx (\alpha(sB)B + sB\partial A + B\partial sA)$$
(7.1.30)

Aus (7.1.28) ersehen wir, daß

$$\partial^{\mu}sA_{\mu} = \Box c_{+} + i\partial^{\mu}[c_{+}, A_{\mu}]. \tag{7.1.31}$$

Wenn wir jetzt ein neues Feld c_{-} einführen, so daß

$$sc_{-} = B,$$
 (7.1.32)

$$s^2 c_- = sB = 0, (7.1.33)$$

dann kann der Summand $\int sc_{-} \Box c_{+}$ in (7.1.30) als Teil der Variation von

$$\Gamma_{\phi\pi} = -Tr \int dx c_{-} \Box c_{+} + c_{-} i \partial^{\mu} [c_{+}, A_{\mu}]$$
(7.1.34)

verstanden werden. Hier ist der erste Summand ein "vernünftiger" kinetischer Term für ein skalares Feld und insgesamt kann so $\Gamma_{g.f.}$ zu einer *Invarianten* ergänzt werden:

$$s(\Gamma_{g.f.} + \Gamma_{\phi\pi}) = sTr \int dx \left(\frac{\alpha}{2}B^2 + B\partial A - c_-\partial^\mu D_\mu c_+\right) = 0$$
(7.1.35)

Hier haben wir die kovariante Ableitung für c_+

$$D_{\mu}c_{+} \equiv \partial_{\mu}c_{+} + i[c_{+}, A_{\mu}] \tag{7.1.36}$$

definiert. Starre Invarianz ist gewahrt, wenn wir annehmen, daß sich c_{\pm} gemäß der adjungierten Darstellung transformieren

$$\delta_{\omega}c_{\pm} = i[\omega, c_{\pm}] \qquad c_{\pm} \equiv \tau^k c_{\pm}^k . \tag{7.1.37}$$

Die gesamte Wirkung

$$\Gamma' = \Gamma_{inv} + \Gamma_{g.f.} + \Gamma_{\phi\pi} \tag{7.1.38}$$

$$\Gamma' = \Gamma_{inv} + Tr \int dx \left(\frac{\alpha}{2}B^2 + B\partial A - c_-\partial Dc_+\right)$$
(7.1.39)

ist demnach invariant unter den BRS-Transformationen

$$sc_{+} = ic_{+}c_{+}, \qquad sc_{-} = B,$$

$$sA_{\mu} = D_{\mu}c_{+}, \qquad sB = 0, \qquad (\alpha, B) - \text{Eichung} \qquad (7.1.40)$$

$$s\varphi_{a} = ic_{+}^{k}T_{ab}^{k}\varphi_{b}.$$

Auch für die α -Eichung

$$\Gamma_{g.f.} = Tr \int dx (-\frac{1}{2\alpha}) (\partial A)^2$$
(7.1.41)

läßt sich eine invariante Erweiterung finden:

$$s\Gamma_{g.f.} = Tr \int dx (-\frac{1}{\alpha}) \partial A \partial s A = Tr \int dx (-\frac{1}{\alpha}) \partial A \partial^{\mu} D_{\mu} c_{+}$$
(7.1.42)

legt nahe ∂A als Variation eines neuen Feldes c_{-} aufzufassen

$$sc_{-} = \partial A$$
 (7.1.43)

und damit als $\phi \pi$ -Wirkung

$$\Gamma_{\phi\pi} = -Tr \int dx (-\frac{1}{\alpha}) c_{-} \partial D c_{+}$$
(7.1.44)

einzuführen. In der Tat ist dann

$$\Gamma' = \Gamma_{inv} + \Gamma_{g.f.} + \Gamma_{\phi\pi} \tag{7.1.45}$$

$$\Gamma' = \Gamma_{inv} + Tr \int dx \left(-\frac{1}{2\alpha} (\partial A)^2 + \frac{1}{\alpha} c_- \partial D c_+ \right)$$
(7.1.46)

invariant unter

$$sc_{+} = ic_{+}c_{+}, \qquad sc_{-} = \partial A,$$

$$sA_{\mu} = D_{\mu}c_{+}, \qquad \alpha \text{-Eichung} \qquad (7.1.47)$$

$$s\varphi_{a} = ic_{+}^{k}T_{ab}^{k}\varphi_{b},$$

aber in dieser Eichung ist die BRS-Transformation nicht nilpotent auf c_- :

$$s^2 c_- = \partial s A = \partial D c_+ \neq 0. \tag{7.1.48}$$

7.2 Die Slavnov-Identität: Klassische Näherung

7.2.1 Herleitung und Eigenschaften

Um auf die Vorgehensweise in höheren Ordnungen vorzubereiten, wollen wir die BRS-Invarianz für das Funktional der klassischen Wirkung formulieren (vergl. Abschnitt 6.2):

$$s\Gamma' \equiv \int dx \left(Tr \left(sA \frac{\delta\Gamma'}{\delta A} + sc_+ \frac{\delta\Gamma'}{\delta c_+} + sc_- \frac{\delta\Gamma'}{\delta c_-} \right) + s\Phi \frac{\delta\Gamma'}{\delta\Phi} \right) = 0$$
(7.2.1)

(Da *B* invariant ist, gilt diese Form für beide oben angegebene Eichungen.) Da c_+ ein propagierendes Feld ist, sind die Transformationen (7.1.40) bzw. (7.1.47) nicht-linear in zu quantisierenden Feldern, entsprechen also zusammengesetzten Operatoren, die nicht ohne weiteres definiert sein werden. Ein übliches Verfahren, solche Produkte zu konstruieren, besteht darin, sie an äußere Felder zu koppeln und diese dann im Quantisierungsprozeß als nicht-propagierende Felder zu berücksichtigen. Wir führen also

$$\Gamma_{e.f.} = \int dx \Big(Tr(\rho^{\mu} s A_{\mu} + \sigma s c_{+}) + Y_{a} s \varphi_{a} \Big)$$
(7.2.2)

so ein, daß für

$$\Gamma = \Gamma' + \Gamma_{e.f.} \tag{7.2.3}$$

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\rho^{\mu}} = sA_{\mu} \tag{7.2.4}$$

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\sigma} = sc_+ \tag{7.2.5}$$

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta Y_a} = s\varphi_a \tag{7.2.6}$$

gilt. Unter der Annahme, daß die äußeren Felder unter s invariant sind, ist weiterhin

$$s\Gamma = 0 \tag{7.2.7}$$

gültig. In der klassischen Näherung folgt nun durch Einsetzen von (7.2.4-7.2.6) in (7.2.1)

$$\mathcal{S}(\Gamma) \equiv \int dx \left(Tr \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\rho^{\mu}} \frac{\delta\Gamma}{\delta A_{\mu}} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\sigma} \frac{\delta\Gamma}{\delta c_{+}} + B \frac{\delta\Gamma}{\delta c_{-}} \right) + \frac{\delta\Gamma}{\delta Y_{a}} \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_{a}} \right) = 0 \qquad (7.2.8)$$

in der (α, B) -Eichung und

$$\mathcal{S}(\Gamma) \equiv \int dx \left(Tr \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\rho^{\mu}} \frac{\delta\Gamma}{\delta A_{\mu}} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\sigma} \frac{\delta\Gamma}{\delta c_{+}} + \partial A \frac{\delta\Gamma}{\delta c_{-}} \right) + \frac{\delta\Gamma}{\delta Y_{a}} \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_{a}} \right) = 0 \qquad (7.2.9)$$

in der α -Eichung, d.h. in Γ bilineare Funktionalgleichungen: die Slavnov-Identität. (Eine Herleitung, die in allen Ordnungen der Störungstheorie gilt, wird weiter unten im Abschnitt 7.3 angegeben werden.) Daß Γ linear und bilinear auftritt, erlaubt zunächst keine einfache Interpretation des Slavnov-Operators $\mathcal{S}(\Gamma)$ als Symmetrietransformation. Um zu einer solchen zu gelangen, ist es zweckmäßig, (7.2.8) auf eine rein Γ -bilineare Form zu bringen. Wir führen über

$$\Gamma = \Gamma_{g.f.} + \bar{\Gamma} = Tr \int (dx \frac{\alpha}{2} B^2 + B \partial A) + \bar{\Gamma}$$
(7.2.10)

170KAPITEL 7. BRS-TRANSFORMATIONEN UND SLAVNOV-IDENTITÄT

ein neues Funktional $\overline{\Gamma}$ ein, das nicht mehr von *B* abhängt. Damit wird aus (7.2.8)

$$\mathcal{S}(\Gamma) = \int dx \left(Tr \left(B \left(\partial \frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta \rho} + \frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta c_{-}} \right) + \frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta \rho} \frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta A} + \frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta \sigma} \frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta c_{+}} \right) + \frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta Y_{a}} \frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta \varphi_{a}} \right) = 0 \quad (7.2.11)$$

Als notwendige Bedingung für die Gültigkeit der Slavnov-Identität folgt also

$$\partial \frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta \rho} + \frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta c_{-}} = 0, \qquad (7.2.12)$$

d.h. $\overline{\Gamma}$ hängt von c_{-} und ρ nur über die Kombination

$$\eta_{\mu} = \rho_{\mu} + \partial_{\mu}c_{-} \tag{7.2.13}$$

ab. Ist diese Bedingung erfüllt (und sie ist es natürlich für Γ aus (7.2.3))), dann hat die Slavnov-Identität die Gestalt

$$\mathcal{S}(\Gamma) \equiv \int dx \left(Tr \left(\frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta \eta} \frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta A} + \frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta \sigma} \frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta c_+} \right) + \frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta Y_a} \frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta \varphi_a} \right) = 0.$$
(7.2.14)

Schreiben wir nun noch

$$\mathcal{S}(\Gamma) = \frac{1}{2} B_{\bar{\Gamma}} \bar{\Gamma} = 0 \tag{7.2.15}$$

 mit

$$B_{\bar{\Gamma}} \equiv \int \left(Tr \left(\frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta \eta} \frac{\delta}{\delta A} + \frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta A} \frac{\delta}{\delta \eta} + \frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta \sigma} \frac{\delta}{\delta c_{+}} + \frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta c_{+}} \frac{\delta}{\delta \sigma} \right) + \frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta Y_{a}} \frac{\delta}{\delta \varphi_{a}} + \frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta \varphi_{a}} \frac{\delta}{\delta Y_{a}} \right), \quad (7.2.16)$$

dann können wir die Slavnov-Identität als Ausdruck für eine Symmetrietransformation interpretieren:

$$\frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta\eta} = B_{\bar{\Gamma}}A = sA \tag{7.2.17}$$

$$\frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta\sigma} = B_{\bar{\Gamma}}c_+ = sc_+ \tag{7.2.18}$$

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta Y_a} = B_{\bar{\Gamma}}\varphi_a = s\varphi_a \tag{7.2.19}$$

 $B_{\bar{\Gamma}}$ ist eine *Transformation* der jeweils angegebenen Felder (so wie in $\int \delta_{\omega} \varphi \frac{\delta}{\delta \varphi} \delta_{\omega} \varphi$ die Transformation des Feldes φ angab) und es ist eine *Symmetrie*transformation, weil $B_{\bar{\Gamma}}\bar{\Gamma} = 0$ gilt. Die jeweils zweiten Gleichungen in (7.2.17) bis (7.2.19) gelten deswegen, weil gerade so die äußeren Felder eingeführt waren. $B_{\bar{\Gamma}}$ ist also auf den

(quantisierten) Feldern A, c_+, φ_a genau die ursprüngliche BRS-Transformation. Neu ist nunmehr die folgende Interpretation

$$\frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta\underline{A}} = B_{\bar{\Gamma}}\eta =: b\eta \tag{7.2.20}$$

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta c_{+}} = B_{\bar{\Gamma}}\sigma =: b\sigma \tag{7.2.21}$$

$$\frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta\varphi_a} = B_{\bar{\Gamma}}Y_a =: bY_a \tag{7.2.22}$$

Wie für A, c_+, φ_a sagt $B_{\bar{\Gamma}}$ aus: erstens, $da\beta \eta, \sigma, Y_a$ und zweitens, wie η, σ, Y_a zu transformieren sind! (Für das hier benutzte klassische Funktional $\bar{\Gamma}$ haben wir die Bezeichnung $B_{\bar{\Gamma}} \equiv b$ eingeführt.) D.h. die äußeren Felder haben sich im Gegensatz zur naiven Version (7.2.7) zu transformieren. Wir geben das Transformationsgesetz explizit an:

$$\bar{\Gamma} = \Gamma_{inv} + \Gamma_{\phi\pi} + \Gamma_{e.f.} \tag{7.2.23}$$

(mit η_{μ} (7.2.13) als Variable).

$$b\eta = \frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta A} = \frac{\delta\Gamma_{inv}}{\delta A} + \frac{\delta}{\delta A}Tr \int \eta \left(\partial c_{+} + i[c_{+}, A]\right)$$

$$b\eta = \frac{\delta\bar{\Gamma}_{inv}}{\delta A} + i\{\eta, c_{+}\}$$

$$(7.2.24)$$

$$b\eta^{k} = \frac{\delta\bar{\Gamma}_{inv}}{\delta A_{k}} + iTr \left(\tau^{k}\{\eta, c_{+}\}\right)$$

$$b\sigma = \frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta c_{+}} = \frac{\delta\Gamma_{\phi\pi}}{\delta c_{+}} + \frac{\delta}{\delta c_{+}}Tr \int \left(i\sigma c_{+}c_{+} + \eta(\partial c_{+} + i[c_{+}, A]\right) + \frac{\delta}{\delta c_{+}}\int Yic_{+}T\varphi$$

$$b\sigma = \partial^{\mu}\eta_{\mu} - i[A^{\mu}, \eta_{\mu}] - i[\sigma, c_{+}]$$

$$b\sigma^{k} = \partial^{\mu}\eta^{k}_{\mu} - iTr \left(\tau^{k}[A, \eta]\right) - iTr \left(\tau^{k}[\sigma, c_{+}]\right) - iY_{a}T^{k}_{ab}\varphi_{b}$$

$$bY = \frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta\varphi} = \frac{\delta\Gamma_{inv}}{\delta\varphi} + \frac{\delta}{\delta\varphi}\int Yic_{+}T\varphi$$

$$bY_{a} = \frac{\delta\Gamma_{inv}}{\delta\varphi_{a}} + i Y_{b}c^{k}_{+}T^{k}_{ba}$$

$$(7.2.26)$$

In den vorstehenden Gleichungen haben wir bei der Berechnung der Ableitungen nach matrizenwertigen Variablen folgende Regel benutzt:

$$\frac{\delta}{\delta c_{+}} Tr \int i\sigma c_{+}c_{+} = Tr(i\sigma \stackrel{\downarrow}{c_{+}} c_{+}) + Tr(i\sigma c_{+} \stackrel{\downarrow}{c_{+}})$$

$$= Tr(i\stackrel{\downarrow}{c_{+}} c_{+}\sigma) - Tr(i\stackrel{\downarrow}{c_{+}} \sigma c_{+}) = i(c_{+}\sigma - \sigma c_{+}) = -i[\sigma, c_{+}]$$
(7.2.27)

d.h. die zu differenzierende Variable muß durch zyklisches Vertauschen unter Berücksichtigung der Grassmannwerte an die erste Stelle unter der Spur gebracht werden, dann "wirkt" die Differentiation.

172KAPITEL 7. BRS-TRANSFORMATIONEN UND SLAVNOV-IDENTITÄT

Wir wollen nun noch zwei wichtige Eigenschaften von $B_{\overline{\Gamma}}$ beweisen:

$$B_{\gamma}B_{\gamma}\gamma \equiv 0 \qquad \qquad \forall \gamma \tag{7.2.28}$$

$$B_{\gamma}B_{\gamma} = 0 \qquad \forall \gamma \text{ mit } B_{\gamma}\gamma = 0 \qquad (7.2.29)$$

Hierzu kürzen wir B_{γ} ab

$$B_{\gamma} \equiv \sum_{\alpha} \int \frac{\delta\gamma}{\delta v^{\alpha}} \frac{\delta}{\delta u_{\alpha}} + \frac{\delta\gamma}{\delta u_{\alpha}} \frac{\delta}{\delta v^{\alpha}}, \qquad (7.2.30)$$

mit v als antikommuntierender, u als kommutierender Variablen und $\frac{\delta}{\delta v}$ als antikommutierendem, $\frac{\delta}{\delta u}$ als kommutierendem Operator. Dann folgt nach kurzer Rechnung

$$B_{\gamma}B_{\gamma} = \int \left(\frac{\delta\gamma}{\delta v^{\alpha}} \frac{\delta^{2}\gamma}{\delta u_{\alpha}\delta v^{\beta}} + \frac{\delta\gamma}{\delta u_{\alpha}} \frac{\delta^{2}\gamma}{\delta v^{\alpha}\delta v^{\beta}}\right) \frac{\delta}{\delta u_{\beta}}$$

$$\left(\frac{\delta\gamma}{\delta v^{\alpha}} \frac{\delta^{2}\gamma}{\delta u_{\alpha}\delta u_{\beta}} + \frac{\delta\gamma}{\delta u_{\alpha}} \frac{\delta^{2}\gamma}{\delta v^{\alpha}\delta u_{\beta}}\right) \frac{\delta}{\delta v^{\beta}}$$
(7.2.31)

Wirkt nun $B_{\gamma}B_{\gamma}$ auf γ , so kompensieren sich der erste und der vierte Summand, während der zweite und dritte jeweils aufgrund von Symmetrie bzw. Antisymmetrie allein verschwinden. Gilt $B_{\gamma}\gamma = 0$, so ziehen wir in der ersten Zeile die Ableitung $\frac{\delta}{\delta v^{\beta}}$, in der zweiten die Ableitung $\frac{\delta}{\delta u_{\beta}}$ nach links, woraufhin in der Klammer gerade $-B_{\gamma}\gamma$ bzw. $B_{\gamma}\gamma$ entsteht, die ja nach Voraussetzung verschwinden. Damit ist (7.2.28) und (7.2.29) gezeigt. Wir sehen, daß der Differentialoperator B_{γ} auf Funktionalen ganz ähnliche Eigenschaften hat wie *s* auf elementaren Feldern. Damit könnte $B_{\Gamma}\bar{\Gamma} = 0$ ganz ähnlich wie *s* auf elementaren Feldern die entsprechenden algebraischen Eigenschaften erzeugen. Dies wird in der Tat der Fall sein.

7.2.2 Allgemeine Lösung

Wir haben bisher ziemlich heuristisch verschiedene Symmetrietransformationen diskutiert, die sich im weiteren Verlauf des Verfahrens als "nützlich" herausstellen sollten. Mit dem vorhergehenden Abschnitt sind wir am ersten Punkt angelangt, an dem sich diese "Nützlichkeit" erweisen kann. Wir wollen zeigen, daß die klassische Wirkung (7.2.3), die unter starren Symmetrietransformationen und unter BRS-Transformationen invariant war, in einem wohlbestimmten Sinne eindeutig ist. Wir postulieren jetzt nämlich

- Eichbedingung : $\frac{\delta\Gamma}{\delta B} = \alpha B + \partial A$ (7.2.33)
- Slavnov-Identität : $S(\Gamma) = 0.$ (7.2.34)
Hier ist $W_{\omega} \equiv \omega^k W^k$, s.(6.2.5), und die neu hinzugekommenen Felder $B, c_{\pm}, \rho_{\mu}, \sigma$ transformieren sich wie A^k_{μ} , während für Y_a : $\delta_{\omega} Y_a = -i\omega^l Y_b T^l_{ba}$ gilt. Die explizite Form der Slavnov-Identität ist in (7.2.8) angegeben. Für Γ lassen wir dabei die allgemeinste Wirkung in den Feldern $A, \varphi, c_+, \rho, \sigma, Y$ der Dimension vier zu. Dann behaupten wir, daß nur noch Normierungsbedingungen zu stellen sind, um die Standardform (7.2.3) zu erreichen. Felder und ihre zugeordneten Quantenzahlen sammeln wir in der Tabelle 7.2.2.

Feld	A_{μ}	φ	ψ	B	c_+	c_{-}	$ ho_{\mu}$	η_{μ}	σ	Y_{φ}	Y_{ψ}
dim	1	1	$\frac{3}{2}$	2	0	2	3	3	4	3	$\frac{5}{2}$
$Q_{\Phi\Pi}$	0	0	0	0	+1	-1	-1	-1	-2	-1	-1

Die starre Invarianz (7.2.32) sagt aus, daß für das allgemeine Γ , das wir suchen, nur starre Invarianten zugelassen sind – die wir bereits alle kennen. Die Eichbedingung (7.2.33) kann leicht integriert werden : es folgt, daß

$$\Gamma = Tr \int dx (\frac{\alpha}{2}B^2 + B\partial A) + \bar{\Gamma}(A, c_{\pm}, \varphi, \rho, \sigma, Y)$$
(7.2.35)

(Tr: wegen starrer Invarianz).

Nun übernehmen wir das Ergebnis (7.2.12), (7.2.13) der Rechnung im vorhergehenden Abschnitt. Es besagt, daß auch das hier zu verwendende allgemeine Funktional $\overline{\Gamma}$ nur von der Kombination

$$\eta = \partial c_{-} + \rho \tag{7.2.36}$$

abhängt. Damit können wir also für $\overline{\Gamma}$ den folgenden allgemeinsten Ansatz machen

$$\Gamma = \Gamma(A, \varphi, c_+, \eta, \sigma, Y)$$

$$\bar{\Gamma} = \Lambda(A, \varphi) + \int dx \Big(\eta^{\mu i} (a^{ij} \partial_\mu c^j_+ - b^{ijk} c^j_+ A^k_\mu) + \sigma^i (-\frac{1}{2}) c^{i[jk]} c^j_+ c^k_+ + Y_a t^k_{ab} c^k_+ \varphi_b \Big) - i \bar{Y}_a t^{*k}_{ab} c^k_+ \varphi_k$$
(7.2.37)

Die Dimensionen und $\phi\pi$ -Ladungen der äußeren Felder erlauben keine anderen Kopplungen, der Term Λ ist unabhängig von äußeren Feldern. Mit der Form (7.2.3) für Γ reduziert sich die Slavnov-Identität auf

$$B_{\bar{\Gamma}}\bar{\Gamma} = 0, \qquad (7.2.38)$$

wobei $\overline{\Gamma}$ die allgemeine Form (7.2.3) hat.

Wir könnten nun (7.2.38) explizit lösen, indem wir die einzelnen Beiträge nach äußeren Feldern z.B. nach absteigender Dimension sortieren. Um aber Rechenarbeit zu sparen und die logische Struktur klarer zu machen, werden wir das Lösen von (7.2.38) auf das Problem des Abschnitts 7.1.1 zurückführen. Wir bezeichnen zu diesem Zweck die äußeren Felder η, σ, Y mit q_i , die elementaren Felder A, c_+, φ_a mit u_i und schreiben (7.2.37) in der Form

$$\bar{\Gamma} = \Lambda(A,\varphi) + \int q_i P_i(u). \tag{7.2.39}$$

Die Slavnov-Identität (7.2.38) führt nun zu

$$\int P_i \left(\frac{\delta \Lambda}{\delta u_i} + (-1)^{|F_{il}|} q_l \frac{\delta P_l}{\delta u_i} \right) = 0, \qquad (7.2.40)$$

d.h. zu

$$(-1)^{|F_{il}|} \int P_i \frac{\delta P_l}{\delta u_i} = 0 \tag{7.2.41}$$

und zu

$$\int P_i \frac{\delta \Lambda}{\delta u_i} = 0 \tag{7.2.42}$$

(denn (7.2.40) gilt ja identisch in den äußeren Feldern). Die Gleichung (7.2.42) charakterisiert das Feldpolynom P_i als Transformation von u_i , wobei A darüberhinaus invariant unter dieser Transformation sein soll; Gleichung (7.2.41) sagt aus, daß diese Transformationen nilpotent sein sollen. (Das Vorzeichen $(-1)^{|F_{il}|}$ ist relevant für die Antikommutation von Feldern und Transformationen gemäß unseren Regeln R1-R3 aus Abschnitt 7.1.1.). Im Abschnitt 7.1.1. haben wir aber gerade dieses Problem gelöst. Passend zu den dortigen Vorgaben von Dimensionen und $\phi\pi$ -Ladungen haben wir dann äußere Felder eingeführt und entsprechend $\bar{\Gamma}$ in (7.2.35) angesetzt. Wir können also auf die dort erzielten Ergebnisse zurückgreifen und erhalten (vergl. (7.1.12), (7.1.21), (7.1.26)) als Bedingungen für die Lösung:

$$c^{m[kl]}c^{k[no]} + c^{m[kn]}c^{k[ol]} + c^{m[ko]}c^{k[ln]} = 0$$
(7.2.43)

die Jacobi-Identität für die Strukturkonstanten einer Lie-Gruppe;

$$[t^k, t^l] = ic^{m[kl]}t^m (7.2.44)$$

t erzeugt eine Darstellung der von den Stukturkonstanten $c^{m[kl]}$ definierten Lie-Gruppe;

$$b^{k(o)m} = a^{kl} c^{lon} (a^{-1})^{nm} (7.2.45)$$

die Matrizen ib^k sind äquivalent zur adjungierten Darstellung.

7.2.3 Normalform, Normierungsbedingungen

Wir wollen nun die allgemeine Lösung, die durch die Bedingungen (7.2.43-7.2.45) beschrieben ist, auf die Form bringen, in der wir die klassische Wirkung angegeben

haben (7.1.38) – dies ist die "Normalform". Hierzu stellen wir zunächst fest, daß mit $c^{i[jk]}$ auch

$$f^{ijk} = (z^{-1})^{il} c^{l[mn]} z^{mj} z^{nk}$$
(7.2.46)

eine Lösung der Jacobi-Identität (7.2.43) ist, d.h. mit einer solchen Äquivalenztransformation dürfen wir die $c^{l[mn]}$ abändern zu gewünschten f^{ijk} . Als nächstes setzen wir

$$f^{mkl} = c^{mkl} + e^{mkl} (7.2.47)$$

und fassen e als kleine Störung von c auf. Dann kann man sich durch Einsetzen in (7.2.43) davon überzeugen, daß sich (7.2.46) ergibt mit

$$z^{mm'} = \delta^{mm'} + \chi^{mm'}, \chi^{mm'} \equiv c^{lmk} e^{km'l}, \qquad (7.2.48)$$

d.h. eine spezielle Wahl von f ist stabil gegen kleine Störungen.

Bezeichnen die f^{ijk} die Strukturkonstanten der betrachteten Algebra in Normalform, so können wir durch Transformation

$$\sigma^{i} \to {\sigma'}^{i} = \sigma^{j} z^{ji}, \quad c^{i}_{+} \to {c'}^{i}_{+} = z^{ij} c^{j}_{+}$$
(7.2.49)

auf den Feldern σ und c_+ zu ihr gelangen. Wir denken uns die Transformation (7.2.49) auch auf den η -abhängigen Termen in $\overline{\Gamma}$ (7.2.37) ausgeführt, bezeichnen die neuen Koeffizienten a', b' aber wieder mit a, b. Die Feldtransformationen

$$\eta^i_\mu \to {\eta'}^i_\mu = \eta^i_\mu a^{ij} \quad A^i_\mu \to {A'}^i_\mu = (a^{-1})^{ij} A^i_\mu$$
 (7.2.50)

bringen die η -Terme auf die Standardform

$$\eta^i (\partial_\mu c^j_+ - f^{ijk} c^j_+ A^k_\mu).$$

Entsprechend ist im Darstellungsraum der Materiefelder noch eine Äquivalenztransformation

$$Y \to Y' = YS, \qquad \varphi \to \varphi' = S\varphi$$

$$(7.2.51)$$

möglich, um die Darstellung t zu einer Darstellung T in Beziehung zu setzen. Hiermit sind alle Transformationen ausgeschöpft und wir sind von der allgemeinsten Lösung der Slavnov-Identität zur Standardform gelangt.

Nun gibt es noch Transformationen, die die Slavnov-Identität invariant lassen und nicht in die Multiplettstruktur der beteiligten Felder eingreifen. Sie legen die absolute Normierung der Beiträge fest und wir werden später zeigen, daß die letzteren gerade alle linear unabhängigen Invarianten unter BRS-Transformationen darstellen, wie sie von $b\equiv B_{\Gamma_{cl}}$ vorgegeben sind.

$$A^{i}_{\mu} \to A'^{i}_{\mu} = z_{A} A^{i}_{\mu}, \qquad \eta^{i}_{\mu} \to \eta'^{i}_{\mu} = \frac{1}{z_{A}} \eta^{i}_{\mu}$$
(7.2.52)

$$c_{+}^{i} \to c_{+}^{\prime i} = z_{+}c_{+}^{i}, \qquad \sigma \to \sigma' = \frac{1}{z_{+}}\sigma \qquad (7.2.53)$$

$$\varphi \to \varphi' = z_{\varphi}\varphi, \qquad \qquad Y \to Y' = \frac{1}{z_{\varphi}}Y \qquad (7.2.54)$$

Des weiteren sind in Λ noch freie Parameter enthalten : der Koeffizient des Yang-Mills Terms Γ_{YM} (Eichkopplungskonstante), etwaige weitere Kopplungskonstanten der eichinvarianten Materieselbstwechselwirkung sowie mögliche eichinvariante Massenterme. Wir fixieren alle diese Parameter durch geeignete Normierungsbedingungen :

$$\Gamma_{A^{j}_{\nu}\tilde{A}^{i}_{\mu}}(0,p) = \left((g_{\mu\nu} - \frac{p_{\mu}p_{\nu}}{p^{2}})\Gamma^{T}(p^{2}) + \frac{p_{\mu}p_{\nu}}{p^{2}}\Gamma^{L}(p^{2}) \right) \delta_{ij}$$
(7.2.55)

$$\partial_{p^2} \Gamma^T(p^2) \Big|_{\substack{p=0\\\alpha=\alpha^{(o)}}} = -\frac{1}{g^2}$$
(7.2.56)

$$\partial_{p^{\mu}} \Gamma_{\tilde{c}^{j}_{+} \eta^{i}_{\mu}}(p,0) \Big|_{p=0} = -i\delta_{ji}$$
(7.2.57)

$$\Gamma_{\tilde{c}_{+}^{k}\tilde{c}_{+}^{j}\sigma^{i}}(p_{1},p_{2},0)|_{p=0} = -f^{ijk}$$
(7.2.58)

Materieselbstwechselwirkungen und Massen sind modellabhängig, d.h. die entsprechenden Normierungsbedingungen sind in den konkreten Modellen angegeben (s. Abschnitt 8.2).

Damit ist die Diskussion der klassischen Näherung abgeschlossen. Starre Invarianz, Eichbedingung und Slavnov-Identität führen zur allgemeinen Lösung mit Koeffizienten $c^{i[jk]}, a^{ij}, b^{ijk}, t^k_{ab}$, die die Bedingungen (7.2.43-7.2.45) erfüllen. Die Feldtransformationen (7.2.49-7.2.51) bringen die entsprechenden BRS-Transformationen zur Standardform, die Normierungsbedingungen schließlich legen die individuelle Theorie fest, die wir hier als klassische BRS-invariante Theorie noch einmal vollständig angeben wollen.

$$\Gamma = \Gamma_{inv} + \Gamma_{g.f.} + \Gamma_{\phi\pi} + \Gamma_{e.f.} \tag{7.2.59}$$

$$\Gamma_{inv} = \Gamma_{YM} + \Gamma_{mat} \tag{7.2.60}$$

$$\Gamma_{YM} = -\frac{1}{4g^2} Tr \int dx F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$
(7.2.61)

$$\Gamma_{g.f.} = Tr \int dx (\frac{\alpha}{2}B^2 + B\partial A)$$
(7.2.62)

$$\Gamma_{\phi\pi} = Tr \int dx \left(-c_{-} \partial (\partial c_{+} + i[c_{+}, A_{\mu}]) \right)$$
(7.2.63)

$$\Gamma_{e.f.} = \int dx \left(Tr(\eta^{\mu} s A_{\mu} + \sigma s c_{+}) + Y s \varphi \right)$$
(7.2.64)

Hier umfaßt Γ_{mat} die modellabhängige invariante Wirkung für Materiefelder, deren Wechselwirkungs- und Massenterme. Für die Formulierung in der α -Eichung benutze man (7.1.45) und (7.1.46).

7.3 Die Slavnov-Identität : Höhere Ordnungen

7.3.1 Konsistenzbedingungen

Wir haben in früheren Abschnitten gezeigt, daß die Greenschen Funktionen formal durch die folgende Formel für erzeugende Funktionale gegeben sind

$$Z = e^{i \int dx \mathcal{L}_{int}(\frac{\delta}{i\delta j})} Z_o \tag{7.3.1}$$

$$Z_{o} = e^{-\frac{1}{2}\int j(x)\Delta_{c}(x-y)j(y)} e^{-\int \bar{\eta}(x)\Delta_{c}(x-y)\eta(y)}$$
(7.3.2)

Hier sind sehr summarisch mit j alle Quellen elementarer Felder bezeichnet, mit $j\Delta_c j$ eine Summe über alle Propagatoren reeller Felder, mit $\bar{\eta}\Delta_c^s\eta$ die Summe über die Propagatoren (komplexer) spinorieller Felder (s. Abschnitt 1.4 für detailliertere Ausführungen). Gehen wir von einer klassisch invarianten Theorie aus, so ist —auf formalen Niveau— Z ebenfalls invariant. Da jedoch bei der Entwicklung der Greenschen Funktionen in Feynman-Diagrammen Divergenzen auftreten, die beseitigt werden müssen und Z zu einem nichttrivialen Funktional machen, respektiert ein nach *irgend* einem Verfahren endlich gemachtes Funktional im allgemeinen in höheren Ordnungen nicht mehr die Invarianzen der klassischen Theorie. Da - wie wir gesehen haben (vergl. Abschnitt 3, insbesondere 3.2) - die Divergenzen in der führenden Ordnung in \hbar eines gegebenen Diagrammes endlichen Polynomen in den äußeren Impulsen entsprechen, sind die zugehörigen Feldpolynome lokal (in derselben \hbar -Ordnung). Bezeichnet W einen Ward-Identitätsoperator und ist bis einschließlich Ordnung \hbar^n die Symmetrie gültig, so kann eine unsymmetrische Beseitigung von Divergenzen in Diagrammen der Ordnung \hbar^{n+1} höchstens zu *lokaler* Abweichung in der Ordnung \hbar^{n+1} führen :

$$WZ = \hbar^{n+1}\Delta + O(\hbar^{n+2})$$
 (7.3.3)

Übergang zu Z_c und Legendre-Transformation zu Γ ergibt für einen linearen Operator W

$$W\Gamma = \hbar^{n+1}\Delta + O(\hbar^{n+2}), \qquad (7.3.4)$$

wobei Δ jetzt ein lokales Polynom in den Feldern der Theorie ist und zwar mit den Quantenzahlen, die $W\Gamma$ hat. Erfüllen die W-Operatoren W_k eine Algebra

$$[W_k, W_l] = i f_{klj} W_j, (7.3.5)$$

so ergibt sich eine Konsistenzrelation für Δ_i :

$$W_i \Gamma = \hbar^{n+1} \Delta_i + O(\hbar^{n+2}) \tag{7.3.6}$$

$$[W_k, W_l]\Gamma = \hbar^{n+1}(W_k \Delta_l - W_l \Delta_k) + O(\hbar^{n+2})$$
(7.3.7)

$$W_k \Delta_l - W_l \Delta_k = i f_{klj} \Delta_j \tag{7.3.8}$$

Als Kandidaten Δ_i , die zu (7.3.6) beitragen, kommen also nur Lösungen von (7.3.8) in Frage. Es ist bemerkenswert, daß (7.3.8) eine klassische Relation ist. Diese Überlegungen lassen sich für die starre Invarianz anwenden und führen dazu, daß Δ_i eine Variation ist. Nach Absorption eines geeigneten Gegenterms und Iteration des Verfahrens gilt

$$W_{\omega}\Gamma = 0 , \qquad (7.3.9)$$

das wir von nun an (für eine ausführliche Diskussion s. Abschnitt 4.) voraussetzen dürfen.

Um eine analoge Konsistenzbedingung für die BRS-Invarianz zu finden, müssen wir uns noch davon überzeugen, daß die Γ -nicht-lineare Form (7.2.8) der Slavnov-Identität

$$\mathcal{S}(\Gamma) \equiv \int dx \left(Tr \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\rho} \frac{\delta\Gamma}{\delta A} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\sigma} \frac{\delta\Gamma}{\delta c_{+}} + B \frac{\delta\Gamma}{\delta c_{-}} \right) + \frac{\delta\Gamma}{\delta Y} \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi} \right) = 0, \qquad (7.3.10)$$

wie wir sie für die klassische Theorie hergeleitet haben, in der Tat auch in höheren Ordnungen einen Sinn hat. Hierzu führen wir über die Legendre-Transformation

$$Z_{c} = \Gamma + \int j_{A}^{\mu} A_{\mu} + j_{\varphi} \varphi + j_{B} B + j_{+} c_{+} + j_{-} c_{-}$$
(7.3.11)

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta u_i} = -j_i \qquad \text{für} \qquad u_i = A_\mu, \varphi, B \tag{7.3.12}$$

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta u_i} = +j_i \qquad \text{für} \qquad u_i = c_{\pm} \tag{7.3.13}$$

das Funktional \mathbb{Z}_c der zusammenhängenden Greenschen Funktionen ein. Die Umkehrtransformation lautet

$$\frac{\delta Z_c}{\delta j_i} = u_i, \qquad \qquad u_i = A_\mu, \varphi, B, c_\pm \tag{7.3.14}$$

Da für äußere Felder

$$\frac{\delta Z_c}{\delta q_i} = \frac{\delta \Gamma}{\delta q_i}, \qquad q_i = \rho, \sigma, Y \qquad (7.3.15)$$

gilt, folgt für die Slavnov-Identität

$$SZ_c \equiv \int \left(Tr \left(j_A \frac{\delta Z_c}{\delta \rho} - j_+ \frac{\delta Z_c}{\delta \sigma} - j_- \frac{\delta Z_c}{\delta j_B} \right) + j_{\varphi} \frac{\delta Z_c}{\delta Y} \right) = 0$$
(7.3.16)

d.h eine in Z_c lineare Gleichung. Für Z lautet die Slavnov-Identität genauso.

$$SZ \equiv \int \left(Tr \left(j_A \frac{\delta Z}{\delta \rho} - j_+ \frac{\delta Z}{\delta \sigma} - j_- \frac{\delta Z}{\delta j_B} \right) + j_\varphi \frac{\delta Z}{\delta Y} \right) = 0.$$
(7.3.17)

Postulieren wir nun in der quantisierten Theorie (7.3.16) oder (7.3.17), so folgt für die Legendre-Transformation Γ wegen (7.3.15) gerade (7.3.10) — letztere ist also eine sinnvolle Gleichung.

Das Wirkungsprinzip, das wir oben für die starren Transformationen angewandt haben, sagt uns analog für die Slavnov-Identität

$$SZ = \hbar^{n+1}\Delta(j) + O(\hbar^{n+2}), \qquad (7.3.18)$$

wenn wir die BRS-Invarianz bis zur Ordnung \hbar^n gezeigt haben. Für Γ gilt demnach

$$\mathcal{S}(\Gamma) = \hbar^{n+1} \Delta + O(\hbar^{n+2}), \qquad (7.3.19)$$

wobei Δ ein Polynom in den Feldern ist und zwar mit $\phi\pi$ -Ladung +1 und Dimension vier. Um die Konsequenzen von (7.3.19) weiterzuverfolgen, beweisen wir die Gültigkeit der Eichbedingung

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta B} = \alpha B + \partial A \tag{7.3.20}$$

in höheren Ordnungen. Dazu fragen wir, welche 1PI-Diagramme es gibt, die äußere B-Linien haben und divergent sind. Nur solche könnten eine nicht-naive Integration von (7.3.17) erforderlich machen. Die Antwort lautet : keine. Da *B* nur einen gemischten Propagator $\langle BA_{\mu} \rangle$ (vergl. Abschnitt 9.2.2) hat, gibt es *überhaupt keine* 1PI-Diagramme mit äußeren B-Linien. Damit können also keine Quantenkorrekturen entstehen und (7.3.20) kann wie in der klassischen Theorie integriert werden:

$$\Gamma = Tr \int dx (\frac{\alpha}{2}B^2 + B\partial A) + \bar{\Gamma}$$
(7.3.21)

Einsetzen in (7.3.19) führt zu

$$\int Tr B\left(\partial \frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta \rho} + \frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta c_{-}}\right) + \frac{1}{2} B_{\bar{\Gamma}} \bar{\Gamma} = \hbar^{n+1} \Delta + O(\hbar^{n+2}) .$$
(7.3.22)

180KAPITEL 7. BRS-TRANSFORMATIONEN UND SLAVNOV-IDENTITÄT

Wenn es uns gelingt, die Gültigkeit der Geist-Bewegungsgleichung

$$\mathcal{G}\Gamma \equiv \partial \frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta \rho} + \frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta c_{-}} = 0 \tag{7.3.23}$$

zu zeigen, so sind wir bei der Form (7.2.15) der Slavnov-Identität angelangt

$$\mathcal{S}(\Gamma) = \frac{1}{2} B_{\bar{\Gamma}} \bar{\Gamma} = \hbar^{n+1} \Delta + O(\hbar^{n+2}) . \qquad (7.3.24)$$

Nun benutzen wir die Relation (7.2.28) und erhalten

$$0 = \hbar^{n+1} B_{\bar{\Gamma}} \Delta + O(\hbar^{n+2}) . \qquad (7.3.25)$$

In niedrigster Ordnung von \hbar gilt

$$\bar{\Gamma}^{(o)} = \bar{\Gamma}_{cl} \tag{7.3.26}$$

$$B_{\bar{\Gamma}_{cl}} = b \tag{7.3.27}$$

und damit folgt

$$b\Delta = 0 \tag{7.3.28}$$

als Konsistenzbedingung für Δ .

Wenden wir W_{ω} auf (7.3.22) an und benutzen die starre Invarianz von $\overline{\Gamma}$, so ergibt sich

$$\frac{1}{2}W_{\omega}(B_{\bar{\Gamma}}\bar{\Gamma}) = \hbar^{n+1}W_{\omega}\Delta + O(\hbar^{n+2})$$
(7.3.29)

$$\frac{1}{2} \left(B_{W_{\omega}\bar{\Gamma}} \bar{\Gamma} + B_{\bar{\Gamma}} (W_{\omega}\bar{\Gamma}) \right) = \hbar^{n+1} W_{\omega} \Delta + O(\hbar^{n+2})$$
(7.3.30)

d.h.
$$W_{\omega}\Delta = 0$$
. (7.3.31)

Für die Gültikeit von (7.3.23) berufen wir uns nun auf ein Renormierungsschema, in dem

$$\mathcal{G}\Gamma = [\mathcal{G}\Gamma_{eff}]\Gamma$$
 gilt, (7.3.32)

wobei
$$\Gamma_{eff} = \Gamma_{cl} + \Gamma_{c.t.}$$
 (7.3.33)

ist. (Ein solches Schema ist z.B das Impulssubtraktionsschema, das wir im Abschnitt 3.2 besprochen haben.)

Dann ist (7.3.23) leicht zu erreichen : wir setzen $\Gamma_{c.t.}$ eben auch als Funktion von η allein an. D.h. wir haben jetzt als Bedingungen für Δ folgende Gleichungen

$$b\Delta = 0$$

$$W_{\omega}\Delta = 0$$

$$\mathcal{G}\Delta = 0$$

$$\frac{\delta}{\delta B}\Delta = 0$$

$$dim(\Delta) = 4$$

$$Q_{\phi\pi}(\Delta) = +1$$

(7.3.34)

7.3.2 Lösung der Konsistenzbedingungen

Das allgemeinste lokale Feldpolynom Δ der Dimension vier, $\phi \pi$ -Ladung+1, das nur von $\sigma, Y, \eta, A, c_+, \varphi$ abhängt, starr invariant und invariant unter *b* ist, soll nunmehr berechnet werden. Wir ordnen die Beiträge zu ihm nach der Dimension der äußeren Felder und benutzen Schritt für Schritt die Konsistenzbedingung (7.3.34). Der erste Term, der zu Δ beiträgt, lautet

$$\Delta = y_1 Tr \int \sigma c_+ c_+ c_+ + \dots, \qquad (7.3.35)$$

wobei die Punkte für $\sigma\text{-unabhängige Beiträge stehen. Die Konsistenzbedingung liefert$

$$0 = b\Delta = y_1 Tr \int (b\sigma c_+ c_+ c_+ + i\sigma c_+ c_+ c_+ c_+) + \dots$$
(7.3.36)

Die klassische Näherung

$$b\sigma = \frac{\delta\bar{\Gamma}^{(o)}}{\delta c_+} = i[\sigma, c_+] + \dots$$
(7.3.37)

heißt für (7.3.36)

$$b\Delta = y_1 Tr \int ic_+ \sigma c_+^3 + \dots$$
 (7.3.38)

Dieser Beitrag verschwindet nur für $y_1 = 0$. Der allgemeinste Term, der Y_a enthält und starr invariant ist, lautet

$$\Delta = y_1 \int Y_a T^k_{ab} \varphi_b c^l_+ c^m_+ f^{klm} + \dots$$
(7.3.39)

(Hier stehen die Punkte für σ - und Y-unabhängige Beiträge.) Eine leichte Rechnung zeigt, daß er eine b-Variation ist:

$$\Delta = -\frac{2}{3}y_2b \int Y_a T^k_{ab}\varphi_b c^k_+ + \dots$$
(7.3.40)

Wir betrachten von nun an alle Δ 's als äquivalent, die sich voneinander nur um *b*-Variationen unterscheiden und schreiben damit sogleich für die η -abhängigen Beiträge

$$\Delta \approx Tr \int \eta^{\mu} R_{\mu}(A, c_{+}) + \dots$$
 (7.3.41)

(Die Punkte stehen für
 σ -, Y-, η -unabhängige Beiträge ;
 \approx äquivalent) R_{μ} hat die Form

$$R_{\mu} = z_1 \partial_{\mu} c_+ c_+ + z_2 c_+ \partial_{\mu} c_+ + z_3 A_{\mu} c_+ c_+ + z_4 c_+ A_{\mu} c_+ + z_5 c_+ c_+ A_{\mu}$$
(7.3.42)

Die Konsistenzbedingung lautet

$$0 = b\Delta = Tr \int (b\eta^{\mu}R_{\mu} - \eta^{\mu}bR_{\mu}) + \dots$$
(7.3.43)

$$0 = Tr \int (\frac{\delta \Gamma^{(o)}}{\delta A_{\mu}} R_{\mu} - \eta^{\mu} b R_{\mu}) + \dots$$
 (7.3.44)

$$0 = Tr \int (i\{\eta^{\mu}, c_{+}\}R_{\mu} - \eta^{\mu}bR_{\mu}) + \dots$$
 (7.3.45)

Einsetzten von R_{μ} und bR_{μ} liefert

$$z_3 = -iz_1 \qquad z_4 = 0 \qquad z_5 = iz_2 \tag{7.3.46}$$

Damit ist auch dieser Term eine Variation

$$\Delta \approx bTr \int \eta^{\mu} (-z_1 A_{\mu} c_+ + z_2 c_+ A_{\mu}) + \dots$$
 (7.3.47)

d.h.

$$\Delta \approx \Delta(A, \psi, \varphi, c_{+}) \tag{7.3.48}$$

Für die Abhängigkeit von Materiefeldern wollen wir nur die Fermionen als Beispiel behandeln (lassen aber dafür auch Beiträge der Dimension drei zu).

$$\Delta = \int \bar{\psi} \gamma^{\mu} \Big((x + x' \gamma_5) T^i \partial_{\mu} c^i_+ + (y + y' \gamma_5) T^i T^j c^i_+ A^j_{\mu} + (z + z' \gamma_5) T^j T^i c^i_+ A^j_{\mu} + (u + u' \gamma_5) T^i c^i_+ \partial_{\mu} + (t + t' \gamma_5) T^i c^i_+ \Big) \psi + \dots$$
(7.3.49)

Auf elementaren Feldern gilt b = s (s.(7.2.17 - 7.2.19)) und aus

$$s\Delta = 0 \tag{7.3.50}$$

folgt nach kurzer Rechnung

$$y = y' = z = z' = t = t' = u = u' = 0$$
(7.3.51)

und damit

$$\Delta \approx s \int \bar{\psi} \gamma^{\mu} (x + x' \gamma_5) T^i A^i_{\mu} \psi. \qquad (7.3.52)$$

Es bleibt also nur noch der Fall zu untersuchen, da
ß Δ von A und c_+ allein abhängt

$$\Delta \approx \Delta(A, c_{+}) = \int c^{i}_{+} P^{i}(A)$$
(7.3.53)

mit $dim P^i(A) \le 4$

Die Konsistenzbedingung ergibt

$$0 = s\Delta = \int dx \left(-\frac{1}{2}f^{ijk}(c^{j}_{+}c^{k}_{+}P^{i})(x) - c^{i}_{+}(x)\int dy c^{j}_{+}(y)w^{j}(y)P^{i}(x)\right)$$
(7.3.54)

 mit

$$w^{i}(y) = -\partial_{\mu} \frac{\delta}{\delta A^{i}_{\mu}} - f_{ijk} A^{j}_{\mu} \frac{\delta}{\delta A^{k}_{\mu}}$$
(7.3.55)

Zweimalige Differentiation nach c_+ liefert als lokale Bedingung an $P^i(x)$

$$w^{i}(x)P^{j}(y) - w^{j}(y)P^{i}(x) = f^{ijk}\delta(x-y)P^{k}(y)$$
(7.3.56)

(Konsistenzbedingung von Wess-Zumino.)

Die Lösung dieser Konsistenzbedingung ist nicht einfach, wir wollen daher nur ihr Ergebnis (für die Eichgruppe SU(N)) anführen:

$$P^{i}(x) = w^{i}(x)\hat{\Delta}(A) + \partial^{\mu}g^{i}_{\mu}(x)$$

$$(7.3.57)$$

$$g^{i}_{\mu} = r\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (d^{ijk}\partial^{\nu}A^{\rho}_{j}A^{\sigma}_{k}$$

$$-\frac{1}{12} \Big(d_{ijn}f^{nkl} + d_{ikn}f^{nlj} + d_{iln}f^{njk})A^{\nu}_{j}A^{\rho}_{k}A^{\sigma}_{l} \Big)$$

$$(7.3.58)$$

Der erste Beitrag in P^i führt zu einer s-Variation in Δ , kann also absorbiert werden; der zweite hingegen ist eine echte Anomalie und kann eine Verletzung der BRS-Invarianz nach sich ziehen.

$$S(\Gamma) \approx r\mathcal{A} + O(\hbar r)$$
 (7.3.59)

$$\mathcal{A} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} Tr \int dx c_+ \partial^\mu (\partial^\nu A^\rho A^\sigma - \frac{i}{2} A^\nu A^\rho A^\sigma)$$
(7.3.60)

Wir werden den Koeffizienten r im nächsten Abschnitt berechnen und zeigen, daß er in der Ein-Schleifen-Näherung den Wert

$$r = k\hbar d^{ijk} Tr T^i \{T^j, T^k\}$$
(7.3.61)

k := numerische Konstante; d^{ijk} total symmetrischer Tensor

hat.

Verschwindet also für gegebene Darstellung T^k der Fermionen der Ausdruck $Tr T^i \{T^j, T^k\}$ nicht, dann ist in dieser Theorie die BRS-Invarianz nicht realisierbar und – wie wir sehen werden – die Unitarität verletzt.

Ehe wir uns genauer mit der Anomalie befassen, wollen wir den Fall r = 0 betrachten und zeigen, daß alle *b*-Variationen absorbiert werden können. Wir nehmen also an

$$S(\Gamma) = b\hat{\Delta} + O(\Delta\delta\hbar) \tag{7.3.62}$$

 mit

$$\hat{\Delta} = \sum_{\alpha} r_{\alpha} \hat{\Delta}_{\alpha} \tag{7.3.63}$$

$$r_{\alpha} = O(\hbar) \qquad \dim \hat{\Delta}_{\alpha} = 4 \qquad Q_{\phi\pi}(\hat{\Delta}_{\alpha}) = 0$$
 (7.3.64)

und – gemäß (7.3.34)

$$\frac{\delta}{\delta B}\hat{\Delta}_{\alpha} = 0 \qquad \qquad \mathcal{G}\hat{\Delta}_{\alpha} = 0 \qquad (7.3.65)$$

Addieren wir $-\hat{\Delta}$ zu Γ_{eff} , definieren also

$$\Gamma' = \Gamma - \sum_{\alpha} r_{\alpha} \hat{\Delta}_{\alpha} \tag{7.3.66}$$

so erfüllt Γ' die Eichbedingung und die Geistergleichung; damit folgt

$$\mathcal{S}(\Gamma') = \frac{1}{2} B_{\bar{\Gamma}'} \bar{\Gamma}' \tag{7.3.67}$$

Benutzen wir nun (7.2.16), so gilt

$$\frac{1}{2}B_{\bar{\Gamma}'}\bar{\Gamma}' = \frac{1}{2}B_{\bar{\Gamma}}\bar{\Gamma} - B_{\bar{\Gamma}}\hat{\Delta} + O(\hbar\hat{\Delta})
= S(\Gamma) - b\hat{\Delta} + O(\hbar\hat{\Delta})
= \Delta - b\hat{\Delta} + O(\hbar\hat{\Delta})$$
(7.3.68)

d.h.

$$\mathcal{S}(\Gamma') = O(\hbar^2) \tag{7.3.69}$$

Iteration des Verfahrens liefert dann

$$\mathcal{S}(\Gamma) = 0 \tag{7.3.70}$$

in allen Ordnungen. Hierzu ist notwendig, daß die Anomalie in keiner Ordnung beiträgt. Dies wiederum gewährleistet ein Nicht-Renormierungstheorem:

$$r \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r^{(1)}\hbar \neq 0 \tag{7.3.71}$$

d.h wenn die Ein-Schleifen-Näherung $r^{(1)} = 0$ ergibt, trägt die Anomalie in keiner Ordnung bei. Der Beweis des Nicht-Renormierungstheorems ist ebenfalls nicht einfach und soll hier unterbleiben.

7.3.3 Die Anomalie in der Slavnov-Identität

Die algebraischen Überlegungen des vorhergehenden Abschnittes haben zu dem Ergebnis geführt, daß die Slavnov-Identität in der Ein-Schleifen-Näherung die folgende Form hat

$$S(\Gamma) = r\mathcal{A} + b\hat{\Delta} + O(\hbar^2)$$

$$\mathcal{A} = Tr \int dx \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} c_+ \partial^{\mu} A^{\nu} \partial^{\rho} A^{\sigma} + Ord(4)$$

(7.3.72)

 $(Ord(4) heißt "Term mit 4 Feldern"), für <math>\hat{\Delta}$ s.(7.3.64).

Wir wollen nun den Koeffizienten r der Anomalie berechnen und wir sind insbesondere daran interessiert, einfache Kriterien dafür zu finden, daß er verschwindet. Wir zeigen zuerst, daß dies der Fall ist, falls Γ invariant unter Parität oder Ladungskonjugation ist.

(a) Parität

$$P: A_{\mu}(x) \to \begin{cases} A_o(x^P) \\ -A_i(x^P) \end{cases} \eta_{\mu}(x) \to \begin{cases} \eta_o(x^P) \\ -\eta_i(x^P) \end{cases} c_+(x) \to c_+(x^P) \quad (7.3.73)$$

Wie der typische Beitrag $\varepsilon_{0123}c_+\partial^o A^1\partial^2 A^3$ zeigt, gilt

$$P: \mathcal{A} \to -\mathcal{A} \tag{7.3.74}$$

Invarianz unter Parität heißt

$$P : \Gamma^P = \Gamma \tag{7.3.75}$$

damit $P(\mathcal{S}(\Gamma)) = \mathcal{S}(\Gamma)$ (7.3.76)

also
$$r = 0$$
 (7.3.77)

(b) Ladungskonjugation

$$C: \qquad A_{\mu} \to -A_{\mu}^{T} \qquad \eta_{\mu} \to -\eta_{\mu}^{T} \qquad c_{+} \to -c_{+}^{T} Y \to Y^{T} \qquad (für adj. Darst.) \qquad \sigma \to -\sigma^{T} \qquad (7.3.78)$$

Hieraus folgt

$$C: \quad \mathcal{A} \to -\mathcal{A}$$

Invarianz von Γ unter C heißt

$$\Gamma^C = \Gamma \tag{7.3.79}$$

damit
$$(\mathcal{S}(\Gamma))^C = \mathcal{S}(\Gamma)$$
 (7.3.80)

also folgt
$$r = 0$$
 (7.3.81)

Zusammengefaßt : alle P- oder C-invarianten Theorien sind anomaliefrei. Dieses Ergebnis bedeutet insbesondere, daß die reine Yang-Mills-Theorie anomaliefrei ist.

Als nächstes suchen wir einen Testoperator X, der so beschaffen ist, daß

$$F.T.(X \ \mathcal{A}_3) = 1 \tag{7.3.82}$$

$$Xb\hat{\Delta} = 0 \tag{7.3.83}$$

(F.T. \equiv Fourier-transformiert).

Um X zu finden, differenzieren wir \mathcal{A}_3 einmal nach c_+ und zweimal nach A:

$$\delta^{3}_{\lambda\kappa} \mathcal{A}_{3} \equiv \frac{\delta^{3}}{\delta A^{\lambda}_{l}(x_{3})\delta A^{\kappa}_{k}(x_{2})\delta c^{i}_{+}(x_{1})} \mathcal{A}_{3}$$

$$= 2\varepsilon_{\mu\lambda\rho\kappa}\partial^{\mu}_{x_{1}}\delta(x_{1}-x_{2})\partial^{\rho}_{x_{1}}(x_{1}-x_{3})d_{ikl}$$
F.T. $\rightarrow = (-i)^{2}\varepsilon_{\mu\lambda\rho\kappa}p^{\mu}q^{\rho}d_{ikl}$
(7.3.84)

Damit ist klar, daß folgender Projektor X (7.3.81) erfüllt:

$$X\mathcal{A}_3 = \frac{-d^{ikl}}{2d^2} \frac{\varepsilon^{\mu\lambda\rho\kappa}}{-24} \frac{\partial}{\partial p^{\mu}} \frac{\partial}{\partial q^{\rho}} \delta^3_{\lambda\kappa} \mathcal{A}_3 = 1$$
(7.3.85)

Um auch (7.3.83) zu erfüllen, untersuchen wir Beiträge zu $\hat{\Delta}$ mit zwei bzw. drei Feldoperatoren A und stellen fest, daß es keine gibt, die ε_{\dots} enthalten. Damit folgt (7.3.83), falls nach Anwendung von X die Felder Null gesetzt werden.

Mit dem Testoperator X haben wir auf der rechten Seite der Slavnov-Identität den Koeffizienten r herausprojeziert. Die Anwendung von X auf die linke Seite liefert dann r ausgedrückt durch die Kombination von Vertexfunktionen. Diese Rechnung wollen wir jetzt ausführen.

X hängt nicht ab von $\frac{\delta}{\delta B}$, d.h.

$$X \ \mathcal{S}(\Gamma) = X \frac{1}{2} B_{\bar{\Gamma}} \bar{\Gamma}$$
(7.3.86)

Führen wir zunächst die Ableitung nach c_+ aus, so ist wegen Erhaltung der $\phi \pi$ -Ladung in Vertexfunktionen klar, daß in (7.3.86) höchstens Beiträge auftreten können, bei denen diese Ableitung auf den ersten Faktor wirkt:

$$\frac{\delta^2}{\delta A \delta A} \left(\frac{\delta^2 \bar{\Gamma}}{\delta c_+ \delta \eta} \frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta A} + \frac{\delta^2 \bar{\Gamma}}{\delta c_+ \delta \sigma} \frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta c_+} + \frac{\delta^2 \bar{\Gamma}}{\delta c_+ \delta Y} \frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta \varphi} \right)$$
(7.3.87)

Wegen Erhaltung der $\phi\pi$ -Ladung verschwindet auch der zweite Summand. Der dritte Summand führt in der Ein-Schleifen-Näherung zu

$$\frac{\delta^2}{\delta A \delta A} \left(\frac{\delta^2 \bar{\Gamma}^{(o)}}{\delta c_+ \delta Y} \frac{\delta \bar{\Gamma}^{(1)}}{\delta \varphi} + \frac{\delta^2 \bar{\Gamma}^{(1)}}{\delta c_+ \delta Y} \frac{\delta \bar{\Gamma}^{(o)}}{\delta \varphi} \right)$$
(7.3.88)

Steht hier das Feld φ für ein Spinorfeld, so verschwindet jeweils der Faktor $\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi}$, denn äußere Spinorlinien bleiben im Diagramm ja erhalten.

Steht es hingegen für ein skalares Feld, so müssen wir eine Fallunterscheidung treffen:

- 1. Es liegt keine spontane Symmetriebrechung vor. Dann sind die Faktoren $\frac{\delta^2 \bar{\Gamma}^{(o)}}{\delta c_+ \delta Y}$ bzw. $\frac{\delta \bar{\Gamma}^{(o)}}{\delta \varphi}$ von der Ordnung φ und verschwinden mit φ (unabhängig von der Anzahl der A-Ableitungen).
- 2. Es liegt spontane Symmetriebrechung vor.¹Hier setzen wir Ergebnisse der Abschnitte 8 bzw. 9 als bekannt voraus.

Der Faktor $\frac{\delta \overline{\Gamma}^{(o)}}{\delta \varphi}$ liefert einen konstanten Beitrag und es ist ein Ausdruck der Form

$$\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}\int iTr\frac{\delta^{3}\bar{\Gamma}^{(1)}}{\delta\tilde{A}\delta\tilde{A}\delta\varphi(o)}$$
(7.3.89)

zu untersuchen. Wegen der zwei Impulsableitungen ist das effektive Verhalten für große Impulse bestimmt durch

$$\delta_{eff} = \delta(\gamma) - 2 = 1 - 2 = -1 \tag{7.3.90}$$

Für $p,q \to \infty$ verschwindet dieser Beitrag. Im zweiten Summanden treten als mögliche Faktoren auf:

$$\frac{\delta\bar{\Gamma}^{(o)}}{\delta\varphi} = 0, \quad \frac{\delta^2\bar{\Gamma}^{(o)}}{\delta\tilde{A}\delta\varphi} \sim vp, \quad \frac{\delta^3\bar{\Gamma}^{(o)}}{\delta\tilde{A}\delta\tilde{A}\delta\varphi} \sim v \tag{7.3.91}$$

Kombiniert mit den entsprechenden Faktoren

$$\frac{\delta^3 \bar{\Gamma}^{(1)}}{\delta A \delta c_+ \delta Y} \qquad \frac{\delta^3 \bar{\Gamma}^{(1)}}{\delta c_+ \delta Y} \tag{7.3.92}$$

ergibt sich ebenfalls wegen der Ableitungen nach p und q ein effektives Verhalten $O(|p|^{-1}, |q|^{-1})$ für große p, q d.h. die Beiträge verschwinden für $p, q \to \infty$. Wir

1*

haben nun noch den ersten Summanden in (7.3.87) zu diskutieren. Er führt zu folgenden Beiträgen.

Kontraktion mit d_{ikl} , dem vollständig symmetrischen Tensor in X, bringt diese Terme zum Verschwinden.

Es bleibt schließlich und endlich

$$\frac{\delta^2 \bar{\Gamma}^{(o)}}{\delta c^i_+ \delta \eta^m_{\varepsilon}} \frac{\delta^3 \bar{\Gamma}^{(1)}}{\delta A^l_{\lambda} \delta A^k_{\kappa} \delta A^{\varepsilon m}} \sim p_1^{\varepsilon} \delta_{im} \qquad (7.3.94)$$

zu analysieren. Nun erinnern wir uns daran, daß die reine Yang-Mills-Theorie anomaliefrei ist (denn sie ist P-invariant). In den 3-Punkt-Funktionen kompensieren sich also die Diagramme, die aus der reinen YM-Theorie herrühren: die Schleifen müssen von Materielinien gebildet sein. Die skalaren Schleifen (s. nachfolgende Abb.) bilden $\Gamma_{\varepsilon\kappa\lambda}$, das wegen der Bosestatistik symmetrisch in $\kappa\lambda$ ist. Die Kontraktion mit $\varepsilon_{..\kappa\lambda}$ aus X liefert Null. Spinorschleifen (s. nachfolgende Abb.)



mit reinen Vektorindizes enthalten kein ε_{\dots} , d.h. Kontraktion mit ε_{\dots} liefert ebenfalls Null. Die Spinorschleife mit einem Axialvektor- und zwei Vektorindizes hingegen, hat $Tr\gamma^{\varepsilon}k_1\gamma^5\gamma^{\lambda}k_2\gamma^{\kappa}k_3$ als Faktor, führt zu einem ε_{\dots} , die Kontraktion mit ε_{\dots} aus X verschwindet nicht. Im Raum der inneren Symmetrie entsteht der

Faktor $Tr \{T^iT^l\}T^k$.

Wir wollen schließlich noch die Subtraktionsaspekte für die relevanten Diagramme diskutieren.

Der Subtraktionsgrad für γ ist $\delta(\gamma) = 1$; der Integrand wird also gemäß

$$R_{\gamma}(p,q,k) = (1 - t_p^1) I_{\gamma}(p,q,k)$$

= $I_{\gamma}(p,q,k) - I_{\gamma}(0,0,k) - p(\partial_p I) \Big|_{p=q=0} - q(\partial_q I) \Big|_{p=q=0}$ (7.3.95)

subtrahiert. Mit dem Faktor $(p+q)_\alpha$ von $\bar{\Gamma}_{c_+Y}^{(o)}$ entsteht

$$(p+q)_{\alpha}R^{\alpha}(p,q,k) \tag{7.3.96}$$

Mit dem ε -Faktor und den Ableitungen nach p und q ist also zu berechnen

$$\varepsilon^{\mu\lambda\rho\kappa} \frac{\partial}{\partial p^{\mu}} \frac{\partial}{\partial q^{\rho}} ((p+q)_{\alpha} R^{\alpha})$$

$$= \varepsilon^{\dots} \frac{\partial}{\partial p^{\mu}} (R_{\rho} + (p+q)_{\alpha} \frac{\partial}{\partial q^{\rho}} R^{\alpha})$$

$$= \varepsilon^{\dots} (\frac{\partial}{\partial p^{\mu}} R_{\rho} + \frac{\partial}{\partial q^{\rho}} R_{\mu} + (p+q)_{\alpha} \partial_{p^{\mu}} \partial_{q^{\rho}} R^{\alpha})$$
(7.3.97)

Einsetzen von (7.3.95) führt zu

$$= \varepsilon^{\dots} \left(\partial_{p^{\mu}} I_{\rho}(p,q,k) - \left(\partial_{p^{\mu}} I_{\rho} \right) \Big|_{p=q=0} + \partial_{q^{\rho}} I_{\mu}(p,q,k) - \left(\partial_{q^{\rho}} I_{\mu} \right) \Big|_{p=q=0} + (p+q)_{\alpha} \partial_{p^{\mu}} \partial_{q^{\rho}} I^{\alpha}(p,q,k) \right)$$

$$(7.3.98)$$

Im Limes $p, q \to \infty$ verschwinden alle von p, q abhängigen Terme und es verbleiben die Terme

$$\varepsilon^{\dots} \left(\left(\partial_{p^{\mu}} I_{\rho} \right)_{p=q=0} + \left(\partial_{q^{\rho}} I_{\mu} \right)_{p=q=0} \right)$$

$$(7.3.99)$$

Wie die genauere Berechnung zeigt, verschwindet in ∂I dank ε^{\dots} die logarithmische Divergenz, so daß das Integral über (7.3.99) wirklich existiert – wie es auch muß: schließlich war das Integral über R_{γ} absolut konvergent und wir haben nur erlaubte Manipulationen vorgenommen. Ganz ähnlich wie in der CS-Gleichung (vergl. Abschnitt 4.5.1) ist der Subtraktionsterm ∂I in (7.3.95) notwendig für Konvergenz, kann also nicht weggelassen werden, führt aber dann zum Auftreten unerwarteter, konvergenter Terme an anderer Stelle. Bei der CS-Gleichung war es die Differentiation nach m, die Konvergenz erzeugt hat, hier ist es die Multiplikation mit ε^{\dots} .

7.4 Bibliographische Angaben

Die Doppelrolle, die die BRS-Transformationen spielen, nämlich algebraisch als Hilfsmittel zur Charakterisierung einer Lie-Algebra und feldtheoretisch zur Festlegung des Vertexfunktionals, ist in der ursprünglichen Arbeit von BRS klar angesprochen. Sie ist ganz maßgeblich genutzt aber erst in der Supersymmetrie, bei der man ohne sie vermutlich nicht auskommen kann (s. Piguet/Sibold, Kap.5). Lehrbuchcharakter hat sie bekommen durch die Vorlesung Piguet II. Ebenso ist hier die schwierige Originalarbeit insgesamt didaktisch und logisch vorbildlich aufbereitet. Unsere Vorlesung folgt Piguet II.

Kapitel 8

Spontane Symmetriebrechung II

8.1 Klassische Näherung

8.1.1 Starre Symmetrie

Anhand eines konkreten Beispiels wollen wir die spontane Symmetrieberechnung im nicht-abelschen Fall untersuchen und das Ergebnis dann verallgemeinern. Wir betrachten als Symmetriegruppe SU(2) und als Darstellungen ein Dublett von Spinoren und ein Triplett von Skalaren. In Formeln:

Spinor-Dublett :
$$\begin{array}{l} \delta_{\omega}\psi_{a} = i\omega^{\kappa}T_{ab}^{*}\psi_{b} \\ \delta_{\omega}\bar{\psi}_{a} = -i\omega^{k}\bar{\psi}_{b}T_{ba}^{k} \end{array} \quad a = 1,2 \quad T^{k} \equiv \frac{\tau^{\kappa}}{2} \tag{8.1.2}$$

Skalar-Triplett : $\delta_{\omega}\pi_i = -\omega_k \varepsilon_{ikj}\pi_j$ (8.1.3)

 ω^k : konstant

Die allgemeinste klassische Wirkung, die invariant unter starrer SU(2), Lorentztransformationen und Parität ist und Dimension ≤ 4 hat, lautet:

$$\Gamma_{cl} = \int dx \left(\frac{1}{2} \partial \underline{\pi} \partial \underline{\pi} - \frac{1}{2} m^2 \underline{\pi}^2 - \lambda (\underline{\pi}^2)^2 + \bar{\psi}_a (i\partial \!\!\!/ - \mu) \psi_a + h \bar{\psi} \underline{T} \underline{\pi} \psi) \right)$$
(8.1.4)

Um die Stabilität der klassischen Theorie zu untersuchen, erinnern wir uns daran, daß

$$\Gamma_{cl} = \int d^4 x \mathcal{L} = \int dt \int d^3 x \mathcal{L} = \int dt L \qquad (8.1.5)$$
$$L = T - V \qquad (8.1.6)$$

ist und L = T - V

eine Zerlegung in kinetische und potentielle Energie darstellt. Die entsprechenden Beiträge in \mathcal{L} sind die entsprechenden Energie*dichten* und die Minima der potentiellen Energiedichte sind zu finden über

$$\pi = \pi(x) = \text{konst.}$$

$$\psi = 0$$
(8.1.7)

(Konstante Spinoren sind nicht verträglich mit Lorentzinvarianz.) Da das absolute Minimum bei $\pi = 0$ liegt, haben wir also

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2}m^2 \underline{\pi}^2 + \lambda(\underline{\pi}^2)^2 \tag{8.1.8}$$

für konstantes $\underline{\pi}$ zu diskutieren.





Das absolute Minimum liegt bei $\underline{\pi} = 0$; die Freiheitsgrade π_1, π_2, π_3 haben klassisch dieselbe "Federkonstante", nach der Quantisierung entspricht das gleicher Masse für alle drei und dem Grundzustand mit $\underline{\pi} = 0$.



Lokales Minimum bei $\pi = 0$. Klassisch sind kleine Schwingungen um $\pi = 0$ erlaubt, quantenmechanisch erwartet man auf Grund des Tunneleffekts Instabilität.



Schwingungen um $\pi = 0$ sind instabil. Schwingungen um das absolute Minimum bei $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{min}$ sind stabil. Sie sind zu finden durch Entwicklung um \mathcal{V}_{min} :

$$\mathcal{V} = -\frac{1}{2}m_o^2\underline{\pi}^2 + \lambda(\underline{\pi}^2)^2 \tag{8.1.9}$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \pi_i} = 0 = \frac{\partial \underline{\pi}^2}{\partial \pi_i} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \underline{\pi}^2} = 2\pi_i \left(-\frac{1}{2}m_o^2 + 2\lambda \underline{\pi}^2\right)$$
(8.1.10)

$$\underline{\pi}_{min}^2 = \frac{m_o^2}{4\lambda} \tag{8.1.11}$$

D.h. es existiert eine ganze Kugeloberfläche von Minima. Die gesamte Fläche ist invariant unter SU(2), die Wahl eines *einzigen* festen Punktes als Grundzustand bricht jedoch die Symmertrie. Als Beispiel wählen wir

$$\pi_3 = \hat{\pi}_3 + v \qquad v = \sqrt{\frac{m_o^2}{4\lambda}}$$

$$\pi_2 = \hat{\pi}_2$$

$$\pi_1 = \hat{\pi}_1$$
(8.1.12)

Diese Variablentransformation verlegt das Minimum zu $\hat{\pi} = 0$ und gibt \mathcal{V} die Form

$$\mathcal{V} = \underline{\hat{\pi}}^2 (-\frac{1}{2}m_o^2 + 2\lambda v^2) + 4\lambda v^2 \hat{\pi}_3^2 + \hat{\pi}_3 (-m_o^2 v + 4\lambda v^3) + O((\hat{\pi})^3) + \text{konst.}$$
(8.1.13)

Mit dem Wert (8.1.12) für v folgt:

$$\mathcal{V} = m_o^2 \hat{\pi}_3^2 + O((\hat{\pi})^3) + \text{konst.}$$
 (8.1.14)

Das Massenspektrum ist also jetzt gegeben durch

$$m(\hat{\pi}_1) = m(\hat{\pi}_2) = 0$$

$$m(\hat{\pi}_3) = \sqrt{2}m_o$$
(8.1.15)

Anregungen mit $\delta \hat{\pi}_3 = 0$ sind ohne Energieaufwand möglich – ihnen entsprechen die verschwindenden Massen, zu denen *zwei* Freiheitsgrade gehören. Anregungen mit $\delta \hat{\pi}_3 \neq 0$ erfordern Energie – ihnen entspricht die nicht-verschwindende Masse, zu denen *ein* Freiheitsgrad gehört.

Das Transformationsgesetz für die Varable
n $\hat{\pi}_i$ lautet

$$\delta_{\omega}\hat{\pi}_{1} = -\omega_{2}(\hat{\pi}_{3} + v) + \omega_{3}\hat{\pi}_{2}$$

$$\delta_{\omega}\hat{\pi}_{2} = \omega_{1}(\hat{\pi}_{3} + v) - \omega_{3}\hat{\pi}_{1}$$

$$\delta_{\omega}\hat{\pi}_{3} = \omega_{2}\hat{\pi}_{1} - \omega_{1}\hat{\pi}_{2}$$

(8.1.16)

D.h. die Felder, die masselose Freiheitsgrade beschreiben, transformieren sich inhomogen, es sei denn $\omega_2 = \omega_1 = 0$. Für solche Transformationen ist \mathcal{V} auch weiterhin invariant! Eine U(1) Untergruppe von SU(2) ist also ungebrochen.

Um die Diskussion dieses Modells zu vervollständigen, untersuchen wir noch die Konsequenzen für die Fermionen. Durch die Variablentransformation (8.1.12) entsteht aus der Yukawa-Wechselwirkung in (8.1.14) ein zusätzlicher Beitrag zur Masse:

$$h\bar{\psi}\underline{T}\,\underline{\pi}\psi \to h\bar{\psi}\underline{T}\,\underline{\hat{\pi}}\psi + hv\bar{\psi}\frac{\tau_3}{2}\psi$$

$$= h\bar{\psi}\underline{T}\,\underline{\hat{\pi}}\psi + \frac{1}{2}hv(\bar{\psi}_1\psi_1 - \bar{\psi}_2\psi_2)$$
(8.1.17)

d.h. die Massenterme für die Fermionen lauten im Fall der spontanen Symmetriebrechung

$$\mathcal{L}_{m}(\psi) = -(\mu - \frac{1}{2}hv)\bar{\psi}_{1}\psi_{1} - (\mu + \frac{1}{2}hv)\bar{\psi}_{2}\psi_{2}$$

$$\equiv -\mu_{-}\bar{\psi}_{1}\psi_{1} - \mu_{+}\bar{\psi}_{2}\psi_{2}$$
(8.1.18)

Wir stellen die beiden Realisierungen der Symmetrie:

 π_3 : m

symmetrischer Grundzustand ("Wigner-Modus") – unsymmetrischer Grundzustand ("Goldstone-Modus") einander gegenüber

Wigner-Modus Goldstone-Modus π_1 : m ψ_1 : μ π_2 : m ψ_2 : μ

Wenn man als Ziel der Elementarteilchenphysik die Beschreibung einer scheinbar ungeordneten Vielfalt von Eigenschaften der Teilchen mit möglichst wenigen Parametern ansieht, so ist der Übergang vom Wignerschen Typ der Symmetrierealisierung zum Goldstoneschen ein Schritt in die richtige Richtung: ohne daß sich die Zahl der physikalischen Parameter geändert hat, sind die die Entartungen im Massenspektrum durch den Wechsel der relevanten Grundzustände nahezu beseitigt worden. Ein phänomologisches Problem ist dabei allerdings neu entstanden : es gibt experimentell keine skalaren Teilchen mit verschwindender Masse. Daß es sich bei ihrem Auftreten im obigem Modell nicht um einen "Zufall" handelt, sagt der folgende Satz von Goldstone aus, mit dem wir unser Beispiel (ohne Beweis) verallgemeinern.

8.1. KLASSISCHE NÄHERUNG

<u>Satz von Goldstone</u>

Wird eine kontinuierliche starre Symmetrie mit Gruppe G spontan gebrochen, so daß eine Untergruppe $H \subset G$ ungebrochen bleibt, dann treten n masselose Teilchen vom Spin Null auf (Goldstoneteilchen).

Für n gilt: n = |G| - |H| $|G| \equiv$ Anzahl der Erzeugenden von GDie Goldstonefelder transformieren sich linear *inhomogen* unter den Symmetrietransformationen.

Es ist sehr instruktiv, diese Ergebnisse noch einmal in der Sprache des Vertexfunktionals und einer Ward-Identität zu formulieren. Die ungebrochene Theorie erfüllt die Ward-Identität:

$$W^{k}\Gamma \equiv -i \int dx T^{k}_{ij} \varphi_{j} \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_{i}} = 0 \qquad (8.1.19)$$

Die gebrochene Theorie gehorcht der Gleichung, die durch die Transformation $\varphi_i \rightarrow \varphi_i + v_i$ entsteht:

$$W^{k}\Gamma \equiv -i \int dx T^{k}_{ij}(\varphi_{j} + v_{j}) \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_{i}} = 0$$
(8.1.20)

Als Kandidat für ein Minimum kommen alle Lösungen vom (8.1.20) für $\varphi_i = 0$ in Frage:

$$\int dx T_{ij}^k v_j \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_i} = 0 \tag{8.1.21}$$

Differentiation von (8.1.20) liefert mit (8.1.21) an der Stelle $\varphi_i=0$

$$\int dx T_{ij}^k v_j \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \varphi_l(y) \delta \varphi_i(x)} = 0$$
(8.1.22)

d.h.
$$\Gamma_{\varphi_l\varphi_i}(p=0)T_{ij}^k v_j = 0$$
(8.1.23)

Wir unterscheiden nun zwei Typen von Lösungen

(1)
$$T_{ij}^k v_j = 0$$
 (8.1.24)

Alle Richtungen k, für die diese Gleichung gilt, entsprechen ungebrochener Symmetrie.

(Im Beispiel : $\varepsilon_i{}^k{}_j v_j = \varepsilon_i{}^k{}_3 v_3 = 0 \quad \Rightarrow k = 3$)

(2)
$$T_{ij}^k v_j \neq 0$$
 (8.1.25)

D.h. diese $T_{ij}^k v_j$ sind Eigenvektoren der Matrix $\tilde{\Gamma}_{\varphi_l \varphi_i}(0)$ zum Eigenwert 0. Man kann zeigen, daß sie linear unabhängig sind. Ihre Anzahl ist n = |G| - |H|. (Im Beispiel : k = 1, 2 d.h. n = 2.)

8.1.2 Lokale Symmetrie

So wie wir es in Abschnitt 6 allgemein ausgeführt haben, wollen wir auch im vorliegenden Beispiel die starre Symmetrie eichen. Wir fordern also Invarianz unter $\omega = \omega(x)$ und führen die entsprechenden Vektorfelder mit minimaler Kopplung ein. Relevant für die nun folgenden Überlegungen sind nur der rein vektorielle Anteil und die Wechselwirkungsterme Skalar-Vektor, so daß wir nur diese explizit aufführen wollen.

$$\Gamma_{A} + \Gamma_{A,\pi} = \int \left(-\frac{1}{4} F^{k}_{\mu\nu} F^{k\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial_{\mu}\pi_{i} + \varepsilon_{i}{}^{k}{}_{j}A^{k}_{\mu}\pi_{j}) (\partial^{\mu}\pi_{i} + \varepsilon_{i}{}^{k'}{}_{j'}A^{k'\mu}\pi_{j'}) \right)$$
(8.1.26)

Von Interesse ist auch nur der Fall (3) d.h. wir müssen die Variablentransformation (8.1.12) ausführen und die Auswirkungen für die Vektoren untersuchen. Sie führt u.a.zu einem Mischungssystem π , A und zu einem A-bilinearen Beitrag

$$\Gamma_A + \Gamma_{A,\pi} \xrightarrow{v \neq 0} \int dx \Big(v(\partial_\mu \hat{\pi}_1 A_2^\mu - \partial_\mu \hat{\pi}_2 A_1^\mu) + \frac{1}{2} v^2 (A_1^\mu A_{1\mu} + A_2^\mu A_{2\mu}) \Big)$$
(8.1.27)

Um diese Terme korrekt interpretieren zu können, diagonalisieren wir erst mit der Transformation

$$A_{1} = V_{1} + \frac{1}{v}\partial\hat{\pi}_{2}$$

$$A_{2} = V_{2} - \frac{1}{v}\partial\hat{\pi}_{1}$$
(8.1.28)

und erhalten

$$(\Gamma_A + \Gamma_{A,\hat{\pi}})_{bil} \xrightarrow{A \to V} \int dx \frac{1}{2} v^2 (V_1^{\mu} V_{1\mu} + V_2^{\mu} V_{2\mu})$$
(8.1.29)

Die Mischungsterme sind verschwunden und für V_1, V_2 haben wir Massenterme erhalten. Zusammen mit den Mischungstermen sind jedoch auch die kinetischen Terme $\frac{1}{2}\partial\hat{\pi}_1\partial\hat{\pi}_1 + \frac{1}{2}\partial\hat{\pi}_2\partial\hat{\pi}_2$ verschwunden. Das legt die Interpretation nahe, daß $\hat{\pi}_1$ und $\hat{\pi}_2$ keine dynamischen Freiheitsgrade mehr sind, sondern sich in die jeweils dritte massive Komponente der Vektoren V_1 und V_2 verwandelt haben. (Ein massives Vektorfeld hat ja drei physikalische Freiheitsgrade.) Wenn diese Interpretation richtig ist, müssen sich die Felder $\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2$ aus der gesamten Theorie eleminieren lassen und ebenso sollten sich die Felder A durch die Felder V ersetzen lassen. Einen Hinweis darauf, wie wir einen entsprechenden Beweis führen können, gibt (8.1.28). Fassen wir nämlich V als infinitesimal von A transformiertes Feld auf

$$V \equiv A' = A + \delta_{\omega} A \tag{8.1.30}$$

$$\delta_{\omega}A_{\frac{1}{2}} = \partial\omega_{\frac{1}{2}} + \dots \tag{8.1.31}$$

196

8.1. KLASSISCHE NÄHERUNG

so sind in (8.1.28) die Koeffizienten in der Tat genau die einer abelschen Eichtransformation von ${\cal A}$

$$\omega_1 = -\frac{1}{v}\hat{\pi}_2$$

$$\omega_2 = +\frac{1}{v}\hat{\pi}_1$$

$$\omega_3 = 0$$

(8.1.32)

Komplettieren wir nun (8.1.31) zur vollständigen nicht-abelschen Eichtransformation, so liest sich (8.1.30) als Variablentransformation

$$A_{1} = V_{1} + \frac{1}{v}\partial\pi_{2} + \frac{1}{v}\pi_{1}V_{3}$$

$$A_{2} = V_{2} - \frac{1}{v}\partial\pi_{1} + \frac{1}{v}\pi_{2}V_{3}$$

$$A_{3} = V_{3} - \frac{1}{v}\pi_{2}V_{2} - \frac{1}{v}\pi_{1}V_{1}$$
(8.1.33)

Sie ändert nicht die Gestalt der Yang-Mills-Terme in (8.1.26), denn sie ist ja eine Eichtransformation, führt aber effektiv die Variablen A_i in die Variablen V_i über. Das entsprechende gilt für alle anderen eichinvarianten Beiträge in Γ_{cl} .

Für die skalaren Felder $\hat{\pi}_i$ ergibt sich als Konsequenz der Transformation (8.1.32)

$$\hat{\pi}_{1}' = \hat{\pi}_{1} - \omega_{2}(\hat{\pi}_{3} + v) + \omega_{3}\hat{\pi}_{2} = 0 - \frac{1}{v}\hat{\pi}_{1}\hat{\pi}_{3}$$

$$\hat{\pi}_{2}' = \hat{\pi}_{2} - \hat{\pi}_{2} - \frac{1}{v}\hat{\pi}_{2}\hat{\pi}_{3} = 0 - \frac{1}{v}\hat{\pi}_{2}\hat{\pi}_{3} \qquad (8.1.34)$$

$$\hat{\pi}_{3}' = \hat{\pi}_{3} + \frac{1}{v}(\hat{\pi}_{1}^{2} + \hat{\pi}_{2}^{2})$$

Als Variablentransformation gelesen bedeutet das

$$\hat{\pi}_{1} = 0 + \frac{1}{v} \hat{\pi}_{1}' \hat{\pi}_{3}'$$

$$\hat{\pi}_{2} = 0 + \frac{1}{v} \hat{\pi}_{2}' \hat{\pi}_{3}'$$

$$\hat{\pi}_{3} = \hat{\pi}_{3}' + O(\pi'^{2})$$
(8.1.35)

D.h. die Felder $\hat{\pi}_1$ und $\hat{\pi}_2$ werden zu Null transformiert, $\hat{\pi}_3$ wird Invariante (nur ω_1 und ω_2 , die ja fixiert sind, sind für sein Transformationsgesetz relevant). Man kann diese Überlegungen, die wir hier für infinitesimale Transformationen dargelegt haben, für *endliche* Transformationen anstellen und kommt dann in allen Ordnungen der Felder zu dem Ergebnis

$$\Gamma_{cl} = \int dx \Big(-\frac{1}{4g^2} F^k_{\mu\nu} F^{k\mu\nu}(V) + \frac{1}{2} v^2 (V_1^2 + V_2^2) \\ + \frac{1}{2} \partial_\mu \hat{\pi}'_3 \partial^\mu \hat{\pi}'_3 - (4\lambda v^2) \hat{\pi}'^2_3 + 2\lambda v \hat{\pi}'^3_3 \\ + \bar{\psi}_1 (iD_\mu \gamma^\mu - \mu_-) \psi_1 + \bar{\psi}_2 (iD_\mu \gamma^\mu - \mu_+) \psi_2 + h \bar{\psi} \frac{\tau_3}{2} \hat{\pi}'_3 \psi \Big)$$
(8.1.36)

mit $D_{\mu} \equiv \partial_{\mu} - i V_{\mu}^{k} \frac{1}{2} \tau^{k}$.

Diese Form einer unter spontan gebrochenen Eichtransformationen invarianten nicht-abelschen Eichtheorie nennt man die "unitäre" Eichung.

Auf $\hat{\pi}'_3$ ist die Eichtransformation trivial $\delta_{\omega}\hat{\pi}'_3 = 0$ der Vektor $\begin{pmatrix} 0\\0\\v \end{pmatrix}$ ist invariant unter H = U(1) – erzeugt von $i\omega_3 T^3$: H ist Stabilitätsgruppe von $\begin{pmatrix} 0\\0\\v \end{pmatrix}$. V_1 und V_2 sind massiv, dies entspricht der ungebrochenen Untergruppe H = U(1); $\hat{\pi}'_3$ ist massiv, $\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2$ sind absorbiert in V_1, V_2 .

Wir wollen nun noch ohne Beweis dieses Ergebnis verallgemeinern. Brout-Englert-Higgs-Mechanismus:

Wird eine einfache lokale Symmetriegruppe G spontan zu einer Untergruppe $H \subset G$ gebrochen (H ist die Stabilitätsgruppe des Minimums von V), dann bleiben die zu H gehörigen Vektorbesonen masselos; die zu G/H gehörigen Vektorbosonen werden massiv unter Absorption der zugehörigen Goldstone-Boson-Kandidaten. Die verbliebenen Skalare sind massiv.

8.2 Bibliographische Angaben

Die Originalarbeiten zur spontanen Symmetriebrechung sind schnell aufgezählt: Goldstone 61, Brout/Englert 64, Higgs 64, Higgs 66. Für die Verbreitung gesorgt hat Kibble 66. Ausführliche Darstellungen findet man in O'Raifeartaigh 69. Natürlich bieten alle neueren Lehrbücher über Quantenfeldtheorie vergleichbare Kapitel, soweit es um die klassische Näherung geht.

Kapitel 9

Unitarität

9.1 Problem

Im zweiten Kapitel haben wir die S-Matrix als unitären Operator eingeführt, der die asymptotischen einlaufenden Zustände Φ_{ein} auf die asymptotischen auslaufenden Φ_{aus} abbildet

Definition :
$$\Phi_{aus} = S\Phi_{ein}$$
 (9.1.1)

Unitarität :
$$SS^{\dagger} = S^{\dagger}S = \mathbf{1}$$
 (9.1.2)

Zur störungstheoretischen Berechnung benutzen wir die Dyson-Formel

$$S = Te^{i\int dx\mathcal{L}_{int}} = \mathbf{1} + \sum_{n} \frac{i^{n}}{n!} \int dz_{1} \dots dz_{n} T\left(\mathcal{L}_{int}(z_{1}) \dots \mathcal{L}_{int}(z_{n})\right)$$
(9.1.3)

Matrixelemente (hier für ein skalares Feld formuliert) sind unmittelbar mit den Greenschen Funktionen verknüpft (LSZ-Formalismus)

$$\langle p_1 \dots p_n \mid S \mid q_1 \dots q_l \rangle$$

$$= \lim \left(\frac{-i}{\sqrt{z}}\right)^{n+l} \prod_{i=1}^n (p_i^2 - m^2) \prod_{j=1}^l (q_j^2 - m^2) \tilde{G}(-p_1, \dots, -p_n; q_1, \dots, q_l) \quad (9.1.4)$$

$$(\lim : p_i^2 \to m^2, q_j^2 \to m^2 \quad \text{mit} \quad p_i^o > 0, \ q_j^o > 0)$$

 \tilde{G} ist die Fouriertransformierte von

$$G(y_1, \dots, y_n; x_1, \dots, x_l) = \langle 0 \mid T(\varphi(y_1) \dots \varphi(x_l)) \mid 0 \rangle, \qquad (9.1.5)$$

das seinerseits mit Hilfe der Gell-Mann-Low-Formel und einem Renormierungsverfahren bestimmt wird:

$$G(y_1 \dots x_l) = R \frac{\langle T\left(\varphi^o(y_1) \dots \varphi^o(x_l) e^{i \int \mathcal{L}_{int}^o}\right) \rangle_{(o)}}{\langle T e^{i \int \mathcal{L}_{int}^o} \rangle_{(o)}}$$
(9.1.6)

Damit ergibt sich als erstes Problem das folgende : selbst wenn in (9.1.3) eine Hermitesche Wechselwirkung $\mathcal{L}_{int}^{\dagger} = \mathcal{L}_{int}$ zugrundegelegt wird und selbst wenn die freie Theorie und die Baum-Graphen-Näherung unitär sind, können die Renormierungen R in (9.1.5) die Unitarität verletzen. So ist etwa die Pauli-Villars Regularisierung eben deswegen nur eine *Regularisierung*, aber keine *Renormierung*; ganz ähnlich könnten die Impulssubtraktionen, die wir in Abschnitt 3.2 eingeführt haben, die Positivitätseigenschaften der Zwei-Punkt-Funktion stören. Für das jeweils gewählte Renormierungsverfahren ist daher ein darauf zugeschnittener Beweis der Unitarität zu führen. Im Falle der Methode von Epstein-Glaser (s.Abschnitt 3.3) wird die Unitarität konstruktiv zur Definiton der Theorie herangezogen, gilt also per constructionem. Für die analytische Renormierung (Speer 66) ist der Beweis unmittelbar geführt worden, für BPHZ mittelbar über Äquivalenz der Verfahren: BPHZ zu BPH (Zimmermann (Erice)); BPH zu analytisch (Hepp (Les Houches)).

In Eichtheorien stellt sich ein zweites Problem : der von den Erzeugern der elemtaren Felder aufgespannte Fockraum ist kein Hilbertraum, sondern enthält Zustände mit negativer oder verschwindender Norm. Hier ist also zunächst ein Hilbertraum physikalischer Zustände zu konstruieren, der vereinbar ist mit der Lorentzinvarianz, und dann ist zu zeigen, daß sich die physikalischen Streuprozesse in diesem Raum abspielen. D.h. die *S*-Matrix transformiert keinen Zustand mit positiver Norm (physikalischer Zustand) in einen unphysikalischen (mit negativer oder verschwindender Norm) und sie ist auf dem Hilbertraum unitär.

Da die Definition der S-Matrix in Theorien mit masselosen Teilchen schwierig ist, wollen wir als Beispiel eine Eichtheorie diskutieren, bei der die Eichinvarianz vollständig gebrochen ist, also alle Felder massiv sind, und mögliche Verallgemeinerungen am Ende diskutieren.

9.2 Modell

Als Symmetriegruppe betrachten wir die diagonale SU(2), die sich aus $SU(2) \times SU(2)$ (Isospin × chirale Symmetrie) ergibt, als Materiefelder ein Isosingulett + Isotriplett:

$$SU(2) \times SU(2): \qquad \begin{array}{ll} \delta \sigma = 0 & \delta' \sigma = -\frac{e}{2} \omega'^{i} \pi^{i} \\ \delta \pi^{i} = \frac{e}{2} \varepsilon^{ijk} \omega^{j} \pi^{k} & \delta' \pi^{i} = -\frac{e}{2} \omega'^{i} (\sigma + v) \quad (9.2.1) \\ \text{Isospin} & \text{chirale Transf.} \end{array}$$

$$SU(2) \qquad : \qquad \delta\sigma = -\frac{e}{2}\omega^{i}\pi^{i}$$

$$(\omega = \omega') \qquad \qquad \delta\pi^{i} = -\frac{e}{2}\left(\varepsilon^{ijk}\omega^{j}\pi^{k} + (\sigma + v)\omega^{i}\right) \qquad (9.2.2)$$

Alle π^i transformieren sich inhomogen, d.h. SU(2) ist vollständig gebrochen. Invariant ist $(\sigma + v)^2 + \underline{\pi}^2$, hieraus wird das Potential $V((\sigma + v)^2 + \underline{\pi}^2)$ gebildet, aus dem wiederum der Wert für v und die Massen folgen

$$v \quad \text{aus} \quad \frac{\delta V}{\delta \varphi_a}\Big|_{\varphi=0} = 0$$
 (9.2.3)

$$\frac{\delta^2 V}{\delta \varphi_b \delta \varphi_a}\Big|_{\varphi=0} = M_{ba}^2 \tag{9.2.4}$$

Drei Eigenwerte der Massenmatrix verschwinden (Goldstone-Bosonen), ein Eigenwert ist positiv (Higgs-Masse).

Wir koppeln nunmehr Vektorfelder invariant an:

$$\Gamma_{inv} = \int \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}{}^{i} F^{i\mu\nu} + \frac{1}{2} D_{\mu} \sigma D^{\mu} \sigma + \frac{1}{2} D_{\mu} \pi^{i} D^{\mu} \pi^{i} - V(\varphi) \right)$$
(9.2.5)

mit den kovarianten Ableitungen

$$D_{\mu}\sigma = \partial_{\mu}\sigma + \frac{e}{2}\pi^{i}A_{\mu}^{i}$$

$$D_{\mu}\pi^{i} = \partial_{\mu}\pi^{i} + \frac{e}{2}\left(\varepsilon^{ijk}\pi^{j}A_{\mu}^{k} - (\sigma + v)A_{\mu}^{i}\right)$$
(9.2.6)

Die bilinearen Beiträge zu Γ_{inv} lauten

$$\Gamma_{inv}^{bil} = \int \left(-\frac{1}{4} (\partial_{\mu} A_{\nu}^{i} - \partial_{\nu} A_{\mu}^{i})^{2} + \frac{1}{2} \frac{e^{2} v^{2}}{4} A_{\mu}^{i} A^{i\mu} + \frac{1}{2} \partial_{\mu} \pi^{i} \partial^{\mu} \pi^{i} - \frac{ev}{2} \partial_{\mu} \pi^{i} A^{i\mu} + \frac{1}{2} \partial_{\mu} \sigma \partial^{\mu} \sigma - \frac{1}{2} m_{H}^{2} \sigma^{2} \right)$$

$$(9.2.7)$$

Da sich Γ_{inv}^{bil} nicht invertieren läßt, addieren wir Eichfixierungs- und $\phi\pi$ -Felder

$$\Gamma_{g.f.} + \Gamma_{\phi\pi} = \int \left(\frac{\alpha}{2} s(c_-^i B^i) + s \left(c_-^i (\partial A^i + \kappa \pi^i) \right) \right)$$
$$= \int \left(\frac{\alpha}{2} B^i B^i + B^i (\partial A^i + \kappa \pi^i) - c_-^i (\partial D c_+^i + \kappa \frac{e}{2} \left(\varepsilon^{ijk} c_+^j \pi^k + (\sigma + v) c_+^i) \right) \right)$$
(9.2.8)

Die BRS-Transformationen sind für Skalare gerade (9.2.2) mit der Ersetzung $\omega^i \to c^i_+$, für die anderen Felder wie im ungebrochenen Fall

$$sc_{-} = B \qquad sc_{+} = ic_{+}c_{+}$$

$$sB = 0 \qquad sA = \partial c_{+} + i[c_{+}, A] \qquad (9.2.9)$$

Als Eichbedingung postulieren wir also

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta B^i} = \alpha B^i + \partial A^i + \kappa \pi^i , \qquad (9.2.10)$$

während die Geistergleichung

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta c_{-}^{i}} = -\partial Dc_{+}^{i} - \frac{1}{2}\kappa e \left(\varepsilon^{ijk}c_{+}^{j}\pi^{k} + (\sigma+v)c_{+}^{i}\right)$$
(9.2.11)

lautet. Mit äußeren Feldern ρ, σ, Y , die an die nichtlinearen BRS-Transformationen $sA, sc_+, s\varphi$ koppeln, nimmt sie die endgültige Gestalt

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta c_{-}^{i}} + \partial^{\mu} \frac{\delta\Gamma}{\delta \rho^{i}} + \kappa \frac{\delta\Gamma}{\delta Y^{i}} = 0 \qquad (9.2.12)$$

an. Gegenüber dem Fall, daß die starre Symmetrie nicht gebrochen ist, haben wir zusätzliche Terme, die von der speziellen Form der Eichfixierung ('t Hooft-Eichung) herrühren. (Der Parameter κ wird weiter unten geeignet gewählt werden.)

9.2.1 Propagatoren

Um den Fockraum der freien Theorie zu konstruieren, wollen wir zuerst die Propagatoren bestimmen, von den Propagatoren zu den Kommutatoren der Felder übergehen und dann die Normen der Ein-Teilchen-Zustände berechnen.

Dieses funktionale Vorgehen ist äquivalent zur kanonischen Quantisierung, solange beide existieren und liefert manchmal noch ein Ergebnis, wenn letztere nicht ohne weiteres möglich ist. Das Higgsfeld möge als einfaches Beispiel dienen.

Der Higgs-bilineare Anteil von Γ_{cl} lautet

$$\Gamma_H^{bil} = \int \frac{1}{2} \partial \sigma \partial \sigma - \frac{1}{2} m_H^2 \sigma^2 , \qquad (9.2.13)$$

die entsprechende Bewegungsgleichung

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\sigma(x)} = -(\Box + m_H^2)\sigma(x) . \qquad (9.2.14)$$

Die Legendre-Transformation wird definiert durch

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\sigma} = -J_{\sigma} \tag{9.2.15}$$

$$-J_{\sigma} = -(\Box + m_H^2)\sigma \tag{9.2.16}$$

9.2. MODELL

Lösen wir diese Gleichung nach σ als Funktion von J_{σ} auf

$$\sigma = \frac{1}{\Box + m_H^2} J_\sigma , \qquad (9.2.17)$$

so liefert die Definition

$$\frac{\delta}{i\delta J_{\sigma}(x)}\sigma[J](y) = \langle T\sigma(x)\sigma(y)\rangle = \frac{-i}{\Box + m_H^2}\delta(x-y)$$
(9.2.18)

die zusammenhängende Zwei-Punkt-Funktion für das σ -Feld. Da (für verschwindende Vakuumerwartungswerte der Felder) die allgemeine Zwei-Punkt-Funktion immer zusammenhängend ist, ist (9.2.18) gerade der gesuchte Propagator.

Im Impulsraum ausgeschrieben lautet (9.2.18)

$$\langle T\tilde{\sigma}(k)\sigma(0)\rangle = \frac{i}{k^2 - m_H^2} \tag{9.2.19}$$

Die ε -Vorschrift für das Umgehen der Pole fügen wir "von Hand" ein. (Sie kann natürlich auch formal korrekt durch einen Zusatzterm in (9.2.16) eingeführt werden; diese Präzisierung ist aber unerheblich für alles folgende.)

Da die $\phi\pi$ -Felder c_{\pm} nicht mit anderen Feldern mischen, geben wir als nächstes ihren Propagator an.

$$\Gamma_{c_{\pm}}^{bil} = \int -c_{-}(\Box + m\kappa)c_{+} \tag{9.2.20}$$

Die zum Higgs-Feld analoge Vorgehensweise liefert $(m \equiv \frac{1}{2}ev)$

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta c_{-}} = -(\Box + m\kappa)c_{+} \tag{9.2.21}$$

$$+j_{c_{-}} = -(\Box + m\kappa)c_{+} \tag{9.2.22}$$

$$\langle Tc_+c_-\rangle = \frac{\delta}{i\delta j_{c_-}}c_+(j_{c_-}) = +\frac{i}{\Box + m\kappa}\delta(x-y)$$
(9.2.23)

$$\langle T\tilde{c}_{+}(k)c_{-}(o)\rangle = \frac{-i}{k^2 - m\kappa}$$
(9.2.24)

(Das von (9.2.16) differierende Vorzeichen in (9.2.22) ist erklärt im Abschnitt 7.3.1. Dort haben wir die Legendre-Transformation explizit angegeben.)

Als bilineare Anteile in Γ^{bil} bleiben nun noch Funktionen von $A,B,\pi :$

$$\Gamma^{bil}_{A,B,\pi} = \int \left(-\frac{1}{4} (\partial_{\mu} A^{i}_{\nu} - \partial_{\nu} A^{i}_{\mu})^{2} + \frac{1}{2} m^{2} (A^{i}_{\mu})^{2} + \frac{1}{2} \partial \pi^{i} \partial \pi^{i} - m \partial \pi^{i} A^{i} + \frac{\alpha}{2} B^{2}_{i} + B^{i} \partial A^{i} + \kappa B^{i} \pi^{i} \right) \qquad (9.2.25)$$

Die Feldgleichungen lauten nach der Legendre-Transformation

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta A^i_{\mu}} = -J^i_{\mu} = (\Box g_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu})A^{i\nu} + m^2 A^i_{\mu} - m\partial_{\mu}\pi^i - \partial_{\mu}B^i$$
(9.2.26)

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta B^{i}} = -J_{B}^{i} = \alpha B^{i} + \partial A^{i} + \kappa \pi^{i}$$
(9.2.27)

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\pi^i} = -J^i_{\pi} = -\Box\pi^i + m\partial A^i + \kappa B^i \tag{9.2.28}$$

Gesucht werden A_{μ}, B, π als Funktionen der Quellen J_{μ}, J_B, J_{π} . Hierzu lösen wir (9.2.27) nach B auf und setzen in (9.2.28) ein

$$B = -\frac{1}{\alpha}J_B - \frac{1}{\alpha}\partial A - \frac{\kappa}{\alpha}\pi$$
(9.2.29)

$$-\Box \pi + m\partial A - \frac{\kappa}{\alpha} (J_B + \partial A + \kappa \pi) = -J_{\pi}$$
(9.2.30)

Die Wahl

$$\kappa = m\alpha = \frac{ev}{2}\alpha \tag{9.2.31}$$

(eingeschränkte 't Hooft-Eichung)

eliminiert die Abhängigkeit von ∂A und erlaubt die unmittelbare Lösung für $\pi(j)$:

$$(\Box + m_o^2)\pi = J_\pi - mJ_B \qquad m_o^2 \equiv m^2\alpha$$
 (9.2.32)

$$\pi = \frac{1}{\Box + m_o^2} (J_\pi - m J_B) \tag{9.2.33}$$

Damit können wir die folgenden Propagatoren angeben:

$$\langle T\pi\pi\rangle = \frac{\delta}{i\delta J_{\pi}}\pi \stackrel{\text{F.T.}}{=} \frac{i}{k^2 - m_o^2}$$
(9.2.34)

$$\langle T\pi B \rangle = \frac{\delta}{i\delta J_B} \pi \stackrel{\text{F.T.}}{=} \frac{-im}{k^2 - m_o^2}$$
 (9.2.35)

$$\langle T\pi A \rangle = \frac{\delta}{i\delta J_{\mu}}\pi = 0 \tag{9.2.36}$$

Wir setzen nun (9.2.33) und den Wert für κ in (9.2.29) ein

$$B = -\frac{1}{\alpha}J_{B} - \frac{m}{\Box + m_{o}^{2}}(J_{\pi} - mJ_{B}) - \frac{1}{\alpha}\partial A$$
(9.2.37)

und differenzieren (9.2.26) nach x, um eine weitere Gleichung für ∂A zu erhalten:

$$-\frac{1}{\alpha}\partial A = -\frac{1}{\alpha m}\Box\pi - \frac{1}{m_o^2}\Box B + \frac{1}{m_o^2}\partial^{\mu}J_{\mu}$$
(9.2.38)

Eingesetzt in (9.2.37) folgt mit (9.2.33) nach kurzer Rechnung

$$(\Box + m_o^2)B = -mJ_\pi + \partial^\mu J_\mu \tag{9.2.39}$$

Das liefert die Propagatoren

$$\langle TBB \rangle = 0 \tag{9.2.40}$$

$$\langle TB(x)A_{\mu}(y)\rangle = \frac{\delta}{i\delta J_{\mu}(y)}B(x) \stackrel{\text{F.T.}}{=} \frac{k_{\mu}}{k^2 - m_o^2}$$
(9.2.41)

(Hierbei ist die Fouriertransformation gemäß $-ik(x-y) \rightarrow \partial^x_\mu = -ik_\mu$ definiert worden.)

Einsetzen von (9.2.33) und (9.2.39) in (9.2.26) führt zur Gleichung

$$(\Box g_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}A)^{\nu} + m^2 A_{\mu} = -J_{\mu} + \frac{\partial_{\mu}\partial_{\nu}}{\Box + m_o^2} J^{\nu} - \frac{m^2\partial_{\mu}}{\Box + m_o^2} J_B \qquad (9.2.42)$$

Die longitudinale Projektion ergibt

$$m^{2}\partial A = \frac{-m_{o}^{2}}{\Box + m_{o}^{2}}\partial^{\nu}J_{\nu} - \frac{m^{2}\Box}{\Box + m_{o}^{2}}J_{B}$$
(9.2.43)

Hiermit folgt aus (9.2.42)

$$(\Box + m^2)A_{\mu} = -J_{\mu} + \frac{1 - \alpha}{\Box + m_o^2} \partial_{\mu} \partial^{\nu} J_{\nu} - \frac{\Box + m^2}{\Box + m_o^2} \partial_{\mu} J_B$$
(9.2.44)

Der letzte noch fehlende Propagator ist also

$$\langle T\tilde{A}_{\mu}(k)A_{\nu}(0)\rangle = \left(-g_{\mu\nu} + \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2}\right)\frac{i}{k^2 - m^2} - \alpha \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2}\frac{i}{k^2 - m_o^2}$$
(9.2.45)

(Als Merkregel zur Kontrolle dieses Propagators geben wir an : (1) für $\alpha = 1$ (Feynman-Eichung) kompensieren sich die longitudinalen Anteile; (2) für Indizes $\mu = \nu = 1, 2, 3$ folgt $-i(-1)\frac{1}{k^2-m^2}$ und das ist gerade der richtige Propagator für ein skalares Feld der Masse m.)

Ein weitere Kommentar ist noch angebracht: die Pole des Higgs-Feldes und des transversalen Vektorfeldes (m_H^2, m^2) sind eichunabhängig; alle anderen Pole liegen bei ein- und derselben Masse $(m_o^2 = \alpha m^2)$ und sind eichabhängig. Diese Entartung im Bereich der unphysikalischen Felder ist ein Indiz dafür, daß Kompensationen zwischen Beiträgen unterschiedlicher Norm auftreten und damit Unitarität ermöglichen können.

9.2.2 Kommutatoren

Am Beispiel des Higgs-Feldes wollen wir den nächsten Schritt demonstrieren. Der Propagator erfüllt die inhomogene Gleichung

$$(\Box + m_H^2)\Delta_c(x; m_H^2) = -i\delta^{(4)}(x)$$
(9.2.46)

und ist durch die ε -Vorschrift eindeutig gemacht. Der Kommutator

$$[\sigma(x), \sigma(y)] = i\Delta_H(x - y, m_H^2)$$
(9.2.47)

$$\Delta_H(x; m_H^2) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^4k e^{-ikx} \varepsilon(k^o) \delta(k^2 - m_H^2)$$
(9.2.48)

erfüllt die homogene Gleichung

$$(\Box + m_H^2)\Delta_H(x; m_H^2) = 0 (9.2.49)$$

und wird eindeutig bestimmt durch die Randbedingungen

$$\Delta_H \Big|_{x_o=0} = 0 \tag{9.2.50}$$

$$i\frac{\partial}{\partial x^o}\Delta_H\Big|_{x_o=0} = -i\delta^{(3)}(\mathbf{x}) \tag{9.2.51}$$

(Vergl. Abschnitt 1.1.2).

Er ist aber auch eindeutig festgelegt (für gegebenen Propagator), wenn wir fordern

$$\Delta_c(x; m_H^2) = i\theta(x_o)\Delta_H^{(+)}(x; m_H^2) - i\theta(-x_o)\Delta_H^{(-)}(x; m_H^2)$$
(9.2.52)

für

$$\Delta_H(x; m_H^2) = \Delta_H^{(+)}(x; m_H^2) + \Delta_H^{(-)}(x; m_H^2)$$
(9.2.53)

Für die gesuchten Kommutatoren der Felder A, B, π müssen wir also nachweisen, daß sie die homogenen Feldgleichungen erfüllen, und den Nachweis der Gültigkeit von (9.2.51) führen, indem wir geeignete Polynome in Ableitungen abspalten.

Die Feldentwicklung (1.1.9)

$$\sigma(x) = \int d^3k \left(\frac{e^{-ikx}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \sigma^{(-)}(\mathbf{k}) + \frac{e^{ikx}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \sigma^{(+)}(\mathbf{k}) \right)$$
(9.2.54)

und die Vertauschungsrelationen

$$[\sigma(\mathbf{k}), \sigma^{\dagger}(\mathbf{k}')] = \delta^{3}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$
(9.2.55)

206

für die Vernichter und Erzeuger sind mit (9.2.47) und (9.2.48) aufs engste verknüpft: (9.2.47) und (9.2.48) gelten genau dann, wenn (9.2.54) und (9.2.55) gelten. Damit können wir also aus den Kommutatoren unmittelbar auf die Vertauschungsrelationen der Vernichter und Erzeuger schließen.

Wir definieren also zunächst die Kommutatoren

$$[A_{\mu}(x), A_{\nu}(y)] = i\Delta_{\mu\nu}^{T} + i\Delta_{\mu\nu}^{L}$$
(9.2.56)

$$[A_{\mu}(x), B(y)] = i\Delta_{\mu B} \tag{9.2.57}$$

$$[A_{\mu}(x), \pi(y)] = i\Delta_{\mu\pi} \tag{9.2.58}$$

$$[B(x), B(y)] = i\Delta_{BB} \tag{9.2.59}$$

$$[B(x), \pi(y)] = i\Delta_{B\pi}$$
(9.2.60)

$$[\pi(x), \pi(y)] = i\Delta_{\pi\pi}$$
(9.2.61)

Dann wollen wir zeigen, daß wir mit den Ansätzen

$$\Delta_{\mu\nu}^{T} = -(g_{\mu\nu} + \frac{\partial_{\mu}\partial_{\nu}}{m^{2}})\Delta(m^{2})$$
(9.2.62)

$$\Delta^L_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{m^2} \Delta(m_o^2) \tag{9.2.63}$$

$$\Delta_{\mu B} = -\partial_{\mu} \Delta(m_o^2) \tag{9.2.64}$$

$$\Delta_{\mu\pi} = 0 \tag{9.2.65}$$
(9.2.65)
(9.2.66)

$$\Delta_{BB} = 0 \tag{9.2.66}$$
$$\Delta_{B\pi} = -m\Delta(m_e^2) \tag{9.2.67}$$

$$\Delta_{B\pi} = \Delta(m_o^2) \tag{9.2.68}$$

die homogenen Feldgleichungen erfüllen können.

(Wir merken im Vorübergehen an, daß

$$\partial^{\mu}\Delta^{T}_{\mu\nu} = -\left(\partial_{\nu} + \frac{\Box}{m^{2}}\partial_{\nu}\right)\Delta(m^{2}) = 0$$
(9.2.69)

$$\partial^{\mu}\Delta^{L}_{\mu\nu} = \frac{\Box}{m^{2}}\partial_{\nu}\Delta(m_{o}^{2}) = -\alpha\partial_{\nu}\Delta(m_{o}^{2})$$
(9.2.70)

als Konsequenz der homogenen Gleichung für Δ ; vergl. (9.2.49).) Die homogenen Feldgleichungen lauten (s. (9.2.26-9.2.28) für j = 0):

$$(\Box g_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu})A^{\nu} + m^2 A_{\mu} - m\partial_{\mu}\pi - \partial_{\mu}B = 0$$
(9.2.71)

$$\alpha B + \partial A + \alpha m\pi = 0 \tag{9.2.72}$$

$$\Box \pi - m\partial A - \alpha m B = 0 \tag{9.2.73}$$

Die Kombination m(9.2.72) + (9.2.73) ergibt

$$(\Box + m_o^2)\pi = 0 \tag{9.2.74}$$

und zeigt, daß (9.2.68),(9.2.67) und (9.2.54) kompatibel sind. (9.2.72) kommutiert mit π , B, A kontrolliert (9.2.66),(9.2.64) und (9.2.63). Der transversale Anteil von $[A_{\mu}, A_{\nu}]$ wird getestet, wenn man (9.2.71) mit A_{ν} kommutiert. Hand in Hand mit diesen Rechnungen geht die Diagonalisierung im Raum der Felder ∂A , B und π . Die Felder

$$\partial \hat{A} = \partial A \tag{9.2.75}$$

$$\hat{\pi} = \pi \tag{9.2.76}$$

$$\hat{B} = B + m\pi + \frac{1}{\alpha}\partial A \tag{9.2.77}$$

sind diagonal, d.h. ihre wechselseitigen Kommutatoren verschwinden. Die diagonalen Kommutatoren lauten

$$[\partial \hat{A}, \partial \hat{A}] = -i\alpha^2 m^2 \Delta(m_o^2) \tag{9.2.78}$$

$$[\hat{\pi}, \hat{\pi}] = i\Delta(m_o^2) \tag{9.2.79}$$

$$[\hat{B}, \hat{B}] = 0 \tag{9.2.80}$$

Für die $\phi\pi$ -Felder ergibt sich aus dem Propagator (9.2.24) der Anti-Kommutator

$$\{c_{-}(x), c_{+}(y)\} = -i\Delta(x - y; m_{o}^{2})$$
(9.2.81)

Als Kontrolle des Kommutators für das Vektorfeld konstruieren wir noch das transversale Vektorfeld, zu dem A_{μ} Anlaß gibt. Wir definieren

$$V_{\mu} = A_{\mu} - \frac{1}{m} \partial_{\mu} \pi - \frac{1}{m^2} \partial_{\mu} B \qquad (9.2.82)$$

und überzeugen uns mit Hilfe von $\partial^{\mu}(9.2.70)$ davon, daß V_{μ} in der Tat transversal ist:

$$\partial^{\mu}V_{\mu} = \partial^{\mu}A_{\mu} - \frac{1}{m}\Box\pi - \frac{1}{m^{2}}\Box B = 0.$$
 (9.2.83)

Einsetzen von (9.2.82) in (9.2.71) zeigt, daß

$$(\Box + m^2)V_{\mu} = 0 \tag{9.2.84}$$

d.h. die Komponenten von V_{μ} sind Felder der Massem. Eine Feldentwicklung in Erzeuger und Vernichter

$$V_{\mu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4k \ \sqrt{2\omega_k} \theta(k^o) \left(\hat{v}_{\mu}(k) e^{-ikx} + \hat{v}^{\dagger}_{\mu}(k) e^{ikx} \right)$$
(9.2.85)

208
führt demnach zu
$$k^{\mu}\hat{v}_{\mu}(k) = 0$$
 (9.2.86)

und zu
$$(k^2 - m^2)\hat{v}_{\mu}(k) = 0$$
 (9.2.87)

Entwickelt in Polarisationsvektoren ergibt sich

$$\hat{v}_{\mu}(k) = \delta(k^2 - m^2) \varepsilon_{\mu}{}^{\nu}(k) v_{\nu}(k) . \qquad (9.2.88)$$

Die Polarisationsvektoren können wir im Ruhesystem $\mathbf{k} = 0, k_o = m$ beliebig auswählen (drei linear unabhängige raumartige Vektoren)

$$\varepsilon_1^{\nu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_2^{\nu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_3^{\nu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
(9.2.89)

Für allgemeine Impulse lassen sie sich definieren gemäß

$$\varepsilon_i{}^j = \delta_i{}^j + \frac{k_i k^j}{m(m+\omega_k)} \qquad \qquad \varepsilon_o{}^j = \frac{k^j}{m} \qquad (9.2.90)$$

(Vergl. Gasiorowicz 1967 S.55 für die explizite Rechnung.)

Dann lassen sich die Vertauschungsrelationen der Erzeuger und Vernichter berechnen:

$$[v_i(\mathbf{k}), v_j^{\dagger}(\mathbf{k}')] = \delta_{ij} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$
(9.2.91)

Ein solches transversales Vektorfeld hat nun tatsächlich den oben angegebenen transversalen Kommutator.

9.2.3 Metrische Struktur des Fockraums, Hilbertraum

Aus der eineindeutigen Beziehung zwischen den Vertauschungsrelationen im Ortsraum (9.2.47) und den Vertauschungsrelationen der Vernichter und Erzeuger im Impulsraum (9.2.55) läßt sich ersehen, daß die Kommutatorfunktion (9.2.63) für $\partial \hat{A}$ zu Vertauschungsrelationen mit negativem Vorzeichen führt. Wir entwickeln $\partial \hat{A}(x)$ in diskreter Normierung

$$\partial \hat{A}(x) = \sum_{k} \left(f_k(x)a_k + f_k^*(x)a_k^{\dagger} \right)$$
(9.2.92)

und finden

$$[a_k, a_{k'}^{\dagger}] = -\delta_{kk'} . \tag{9.2.93}$$

Damit haben aber die von a_k^{\dagger} erzeugten Ein-Teilchen-Zustände negative Norm:

$$\|\hat{a}_k^{\dagger}|o\rangle\|^2 = \langle o|\hat{a}_k\hat{a}_k^{\dagger}|o\rangle = \langle o|[\hat{a}_k, \hat{a}_k^{\dagger}]|o\rangle = -\langle o|o\rangle = -1$$
(9.2.94)

Im Raum der physikalischen Zustände, der ein Hilbertraum, also ein Raum mit positiv definiter Metrik sein soll, dürfen solche Zustände nicht auftreten, denn sonst wäre keine Wahrscheinlichkeitsinterpretation mehr möglich. Um solche unerwünschten Zustände im Fockraum \mathcal{V} aller Zustände auszuschließen, brauchen wir eine Bedingung. Im (massiven) abelschen Fall konnten wir zeigen (s. Abschnitt 4.4.2), daß als Operatorgleichung

$$(\Box + m_o^2)\partial A = 0 \tag{9.2.95}$$

galt (α -Eichung) oder – in der (α , B) – Eichung –

Eichbedingung :

 $B = -\frac{1}{\alpha}\partial A$

 $\Box B = m^2 \partial A$

Ward-Identität :

(9.2.97)

(9.2.96)

d.h.
$$(\Box + m_o^2)B = 0$$
 $m_o^2 \equiv \alpha m^2$ (9.2.98)

Damit war eine Bedingung

$$(\partial A)^{(+)}|phys\rangle = 0 \tag{9.2.99}$$

bzw.
$$B^{(+)}|phys\rangle = 0$$
 (9.2.100)

zur Auszeichnung der physikalischen Zustände in der freien und in der wechselwirkenden Theorie gleichermaßen sinnvoll. Denn (9.2.95) bzw. (9.2.98) heißt ja gerade, daß ∂A bzw. *B* freie Felder sind, also eine eindeutige Zerlegung in Erzeuger und Vernichter zulassen und die Kennzeichnung der physikalischen Zustände von der *S*-Matrix respektiert wird:

$$[S, B^{(+)}] = 0 (9.2.101)$$

für ein freies Feld, d.h. $S|phys\rangle$ ist ein physikalischer Zustand, wenn $|phys\rangle$ einer war.

Im vorliegenden nicht-abelschen Fall zeigt ein Blick auf die lokale Ward-Identität, daß ∂A und B keine freien Felder mehr sind:

$$w^{k}(x)\Gamma_{cl} = \Box B^{k} - i\partial[A, B]^{k} + \kappa B^{i}\left(-\frac{e}{2}\varepsilon^{ijk}\pi^{j} + \left(\frac{e}{2}\sigma + m\right)\delta^{ik}\right) \qquad (9.2.102)$$

210

(Die Terme, die bilinear in den Feldern sind, stellen effektiv Wechselwirkungen dar.)

D.h. (9.2.100) kann nicht gefordert werden. Vielmehr wird ein Operator Q gesucht, der für die freie *und* die wechselwirkende Theorie existiert, mit der S-Matrix kommutiert:

$$[Q, S] = 0 \tag{9.2.103}$$

und so beschaffen ist, daß aus

$$Q|phys\rangle = 0 , \qquad (9.2.104)$$

$$\| |phys\rangle \| \ge 0 \tag{9.2.105}$$

folgt. Denn dann wählt die Bedingung (9.2.104) aus allen Zuständen des Fockraumes \mathcal{V} solche mit semi-definiter Norm aus – sie bilden \mathcal{V}_{phys} . Diejenigen Zustände aus \mathcal{V}_{phys} , die verschwindende Norm haben, bilden einen Unterraum $\mathcal{V}_o \subset \mathcal{V}_{phys}$. Man kann Äquivalenzklassen $\mathcal{V}_{phys}/\mathcal{V}_o$ bilden (d.h. man unterscheidet nicht zwischen Vektoren, die nur verschiedene "Anteile" an Norm-Null-Komponenten haben) und als deren Abschluß den Hilbertraum definieren:

$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{V}_{phys}/\mathcal{V}_o} \tag{9.2.106}$$

Natürlich muß sich die Suche nach einem geeigneten Operator Q davon leiten lassen, welche Zustände im Fockraum \mathcal{V} welche Norm haben. Aus den Kommutatoren (9.2.91) und (9.2.55) schließen wir, daß die drei Komponenten des massiven transversalen Vektorfeldes V_{μ} und das Higgs-Feld zu physikalischen Teilchen im strengen Sinn gehören: die Pole der Propagatoren sind eichunabhängig, die Normen der zugehörigen Zustände streng positiv. Wir bezeichnen sie kollektiv mit $(a_{\alpha}) = \{V_{\mu}, H\}$. Unphysikalisch sind dagegen die Felder $\chi_k = \{\frac{1}{m_{\alpha}^2}(\partial A)_k, -\frac{1}{m}\pi_k\}$ (Normierungskoeffizienten s.u.), ebenso die Felder b_k, c_{+k} und c_{-k} , denn die Pole ihrer Propagatoren sind eichabhängig und die Normen (u.U. sogar in Abhängigkeit von der Eichung) positiv, Null oder negativ. Da a_{α} invariant unter dem Feld-linearen Anteil der BRS-Transformation ist, die anderen Felder aber unter BRS variieren, insbesondere $sc_{-} = B$ ist und b_{k}^{\dagger} in $|phys\rangle$ ausgeschlossen werden muß, liegt es nahe, Q mit der BRS-Symmetrie in Verbindung zu bringen. Wenn etwa Q = s wäre, so könnte man hoffen, Q auch in der wechselwirkenden Theorie definieren zu können, denn als Ladung (= Erzeugende einer Symmetrietransformation) hätte es alle Chancen zu existieren. Ehe wir diese Vermutung positiv bestätigen, müssen wir noch kurz auf eine Besonderheit eingehen, die mit den Faddeev-Propov-Feldern c_{\pm} zu tun hat.

Gerade im Zusammenhang mit den gegenwärtigen Überlegungen hat es sich als vorteilhaft herausgestellt, c_+ und c_- als voneinander unabhängige Felder zu betrachten und ihnen die folgenden Hermitetizitätseigenschaften zuzuordnen:

$$(c_{+}^{i}(x))^{\dagger} = c_{+}^{i}(x) \qquad (c_{-}^{i}(x))^{\dagger} = -c_{-}^{i}(x) \qquad (9.2.107)$$

Damit ergibt sich als geeignete Entwicklung in Erzeugern und Vernichtern

$$c_{+}(x) = \sum_{k} \left(f_{k}(x)c_{+k} + f_{k}^{*}(x)c_{+k}^{\dagger} \right)$$
(9.2.108)

$$c_{-}(x) = \sum_{k} \left(f_{k}(x)c_{-k} + f_{k}^{*}(x)c_{-k}^{\dagger} \right)$$
(9.2.109)

mit den Regeln

$$(c_{+k})^{\dagger} = c_{+k}^{\dagger} \qquad (c_{-k})^{\dagger} = -c_{-k}^{\dagger} \qquad (9.2.110)$$

(Vernichter)[†] = Erzeuger

für das Hermitesch-Konjugieren. Dieses Vorgehen ist gerechtfertigt, weil c_+ und c_- jeweils getrennt die Klein-Gordon-Gleichung erfüllen. Als nicht-verschwindenden Anti-Kommutator haben wir oben (9.2.81) gefunden

$$\{c_{-}(x), c_{+}(y)\} = -\frac{1}{(2\pi)^{3}} \int dk e^{-ikx} \epsilon(k^{o}) \delta(k^{2} - m_{o}^{2})$$
(9.2.111)

Das legt nahe, die folgenden Vertauschungsregeln für die Erzeuger und Vernichter zu fordern:

$$\{c_{\pm k}, c_{\pm l}^{\dagger}\} = \{c_{\pm k}, c_{\pm l}\} = \{c_{\pm k}^{\dagger}, c_{\pm l}^{\dagger}\} = 0$$
(9.2.112)

$$\{c_{+k}, c_{-l}'\} = \delta_{kl} \tag{9.2.113}$$

Als Konsequenz von (9.2.110) ergibt sich

$$\{c_{-k}^{\dagger}, c_{+l}\} = +\delta_{kl}; \quad \{c_{-k}, c_{+l}^{\dagger}\} = -\delta_{kl}.$$
(9.2.114)

Alle diese Regeln sind im Einklang mit der kanonischen Quantisierung. Als Konsequenz ergibt sich insbesondere, daß die Normen der c_{\pm} -Ein-Teilchen-Zustände verschwinden:

$$\begin{aligned} \|c_{\pm k}^{\dagger}|o\rangle\|^{2} &= \langle o| \pm c_{\pm k}c_{\pm k}^{\dagger}|o\rangle \\ &= \langle o| \pm \{c_{\pm k}, c_{\pm k}^{\dagger}\}|o\rangle = 0 \end{aligned}$$
(9.2.115)

(und nicht negativ sind – wie es der Fall wäre bei anderen Hermitezitätsregeln). Ebenso ist die Wirkung $\Gamma_{\phi\pi}$ (9.2.8) Hermitesch, der formale *S*-Operator $S = e^{i \int \mathcal{L}_{int}}$ also pseudo-unitär.

Wir fassen die Vertauschungsregeln der Erzeuger und Vernichter aller unserer Felder zusammen:

9.2. MODELL

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir nun beweisen, daß

$$Q = i \sum_{k} \left(c_{+k}^{\dagger} b_k - b_k^{\dagger} c_{+k} \right)$$
(9.2.117)

ein geeigneter Operator ist. Wir werden zeigen, daß Q die folgenden Eigenschaften hat:

- (1) Q erzeugt in der freien Theorie die BRS-Transformationen.
- (2) Q kommutiert mit den Projektoren auf Unterräume mit n unphysikalischen Teilchen.
- (3) Aus $Q|f\rangle = 0$ folgt $\langle f|f\rangle \ge 0$
- (d.h. Q charakterisiert die Vektoren aus \mathcal{V}_{phys}).

Beweis von Eigenschaft (1):

$$[Q, a_{\alpha}] = 0 \tag{9.2.118}$$

ist trivial. Dies entspricht der Tatsache, daß sa_{α} nicht-linear, d.h. in der freien Theorie Null ist.

$$[Q, b_l] = 0 \tag{9.2.119}$$

folgt ebenfalls trivialerweise aus (9.2.116) und entspricht

$$sB = 0$$
. (9.2.120)

$$[Q,\chi_l] = i \sum_k \left(0 - [b_k^{\dagger} c_{+k},\chi_l] \right) = i \sum_k (\delta_{kl}) c_{+k} = i c_{+l}$$
(9.2.121)

und entspricht

$$s(\partial A) = \Box c_{+} = -m_{o}^{2}c_{+}$$
 (9.2.122)

$$s\pi = \frac{e}{2}vc_{+} = mc_{+} \tag{9.2.123}$$

in der freien Theorie (d.h. $\chi = \frac{1}{m_o^2} \partial A$ bzw. $\chi = -\frac{1}{m} \pi$ ist die richtige Normierung).

$$\{Q, c_{-k}\} = -ib_k \tag{9.2.124}$$

$$\{Q, c_{-k}^{\dagger}\} = -ib_k^{\dagger} \tag{9.2.125}$$

und entspricht

$$sc_{-} = B.$$
 (9.2.126)

$$\{Q, c_{+l}\} = \{Q, c_{+l}^{\dagger}\} = 0 \tag{9.2.127}$$

und entspricht

$$sc_{+} = 0$$
 (9.2.128)

in der freien Näherung.

Damit ist für alle Zustände nachgewiesen, daß Q in der freien Theorie die BRS-Transformationen erzeugt.

Beweis von Eigenschaft (2):

Wenn $P^{(n)}$ den Projektor auf den Unterraum mit n unphysikalischen Teilchen bezeichnet, so wollen wir zeigen

$$[Q, P^{(n)}] = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$
(9.2.129)

Hierzu werden wir die Projektoren $P^{(n)}$ explizit angeben. Wir beginnen mit n = 0, suchen also einen Operator, der auf den Raum projiziert, der von den Erzeugern a^{\dagger}_{α} aufgespannt wird. Er lautet

$$P^{(o)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \left(a_{\alpha_1}^{\dagger} \dots a_{\alpha_k}^{\dagger} | o \rangle \langle o | a_{\alpha_1} \dots a_{\alpha_k} \right)$$
(9.2.130)

Es ist klar, daß

$$P^{(o)}|o\rangle = |o\rangle \tag{9.2.131}$$

$$P^{(o)}a^{\dagger}_{\beta}|o\rangle = a^{\dagger}_{\beta}|o\rangle \qquad (9.2.132)$$

usw. ...

gilt. Ebenso:

$$P^{(o)} \begin{pmatrix} \chi^{\dagger} \\ b^{\dagger} \\ c^{\dagger}_{+} \\ c^{\dagger}_{-} \end{pmatrix} |o\rangle = 0.$$
 (9.2.133)

Ebenso klar ist, daß

$$[Q, P^{(o)}] = 0 (9.2.134)$$

denn b_k und c_{+k} kommutieren mit allen a_{α} . $P^{(1)}$ hat die Form

$$P^{(1)} = \sum_{k} \left(b_{k}^{\dagger} P^{(o)} \chi_{k} + \chi_{k}^{\dagger} P^{(0)} b_{k} - c_{+k}^{\dagger} P^{(o)} c_{-k} + c_{-k}^{\dagger} P^{(o)} c_{+k} \right)$$

$$- \sum_{k,l} \omega_{kl} b_{k}^{\dagger} P^{(o)} b_{l}$$
(9.2.135)

Die Kontrolle auf Ein-Teilchen-Zuständen ist einfach. Z.B.

$$P^{(1)}c^{\dagger}_{-l}|o\rangle = c^{\dagger}_{-l}|o\rangle \tag{9.2.136}$$

wegen (9.2.114) und (9.2.130). Ebenso läßt sich mit geringer Mühe zeigen, daß

$$[Q, P^{(1)}] = 0 (9.2.137)$$

gilt. Außer den Vertauschungsrelationen (9.2.116) benutzt man (9.2.134). Der Projektor $P^{(n)}$ ist nun rekursiv definiert über

$$P^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{k} \left(b_{k}^{\dagger} P^{(n-1)} \chi_{k} + \chi_{k}^{\dagger} P^{(n-1)} b_{k} - c_{+k}^{\dagger} P^{(n-1)} c_{-k} + c_{-k}^{\dagger} P^{(n-1)} c_{+k} \right)$$

$$- \frac{1}{n} \sum_{k,l} \omega_{kl} b_{k}^{\dagger} P^{(n-1)} b_{l}.$$
(9.2.138)

Mit der Induktionsvoraussetzung $[Q,P^{(n-1)}]=0$ zeigt man genau wie für den Fall $[Q,P^{(1)}]=0$ die gewünschte Relation

$$[Q, P^{(n)}] = 0. (9.2.139)$$

Daß die Operatoren $P^{(n)}$ in der Tat einen vollständigen Satz hermitescher, orthogonaler Projektoren bilden, wird ausgedrückt durch die Gleichungen

$$P^{(n)^2} = P^{(n)} = P^{(n)^{\dagger}} \tag{9.2.140}$$

$$P^{(n)}P^{(m)} = P^{(m)}P^{(n)} = \delta_{mn}P^{(n)} \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$
(9.2.141)

$$\sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)} = \mathbf{1}$$
(9.2.142)

Ihr Beweis soll hier nicht explizit vorgeführt werden.

Beweis der Eigenschaft (3):

Der Beweis umfaßt drei Teilschritte. Zuerst zeigt man, daß Q nilpotent ist

$$Q^2 = 0 \tag{9.2.143}$$

Im zweiten Schritt beweist man, daß

$$\langle f|P^{(n)}|f\rangle = 0 \qquad \text{für} \quad n \ge 1 \tag{9.2.144}$$

Man gelangt unter Benutzung von (9.2.138) rasch zu

$$\langle f|P^{(n)}|f\rangle = \langle f|\frac{1}{n}\sum_{k,l}\omega_{kl}c^{\dagger}_{-k}QP^{(n-1)}Qc_{-l}|f\rangle \qquad (9.2.145)$$

und damit zu (9.2.144) wegen (9.2.143).

Im dritten Schritt benutzt man die Vollständigkeit der Projektoren.

$$\langle f|f \rangle = \langle f|\sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}|f \rangle = \langle f|P^{(o)}|f \rangle$$

$$= \langle P^{(o)}f|P^{(o)}f \rangle$$

$$(9.2.146)$$

Da $P^{(o)}$ auf den Unterraum der physikalischen Teilchen a_{α} projiziert, kann die Norm von $P^{(o)}|f\rangle$ äußerstenfalls verschwinden, wenn nämlich keine a_{α}^{\dagger} in $|f\rangle$ enthalten sind, aber nicht negativ werden:

$$\langle P^{(o)}f|P^{(o)}f\rangle \ge 0$$
 (9.2.147)

Damit ist also bewiesen:

$$Q|f\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle f|f\rangle \ge 0 \tag{9.2.148}$$

und Q hat alle zuvor behaupteten und gewünschten Eigenschaften.

Wir fassen zusammen: Der Fockraum \mathcal{V} enthält Zustände mit negativer und verschwindender Norm. Die Bedingung $Q|f\rangle = 0$ (9.2.104) wählt Zustände $|f\rangle \in \mathcal{V}_{phys}$ aus mit nicht-negativer Norm, $\langle f|f\rangle \geq 0$ (9.2.148). Elemente der Äquivalenzklassen $\mathcal{V}_{phys}/\mathcal{V}_o$ sind Zustände mit strikt positiver Norm. Ihr Abschluß $\overline{\mathcal{V}_{phys}}/\mathcal{V}_o$ bildet den physikalischen Hilbertraum \mathcal{H} der Theorie. Der Operator Qerzeugt die BRS-Transformationen in der freien Theorie, d.h. $Q|f\rangle = 0$ kann man qualitativ verstehen als Auswahl BRS-invarianter Zustände. Da in der freien Theorie $S = \mathbf{1}$ ist, kommutiert Q trivialerweise mit S.

9.3 Wechselwirkende Theorie

In der wechselwirkenden Theorie wird die Forderung, daß Q mit S kommutiert, relevant. Denn dann ist mit $|phys\rangle$ auch $S|phys\rangle$ ein physikalischer Zustand. Wir werden für unsere Rechnungen eine funktionale Form der S-Matrix zugrundelegen, wie sie z.B. in Itzykson/Zuber (1985) ((5.38), (9.91)) hergeleitet wird.

$$S = : e^{\int dx dy \Phi_{ein}(x) K(x-y) z^{-1} \frac{\delta}{\delta J(y)}} : Z(J)_{|J=0}$$
(9.3.1)

Hier bezeichnen die Symbole:

J: äußere Quellen, die an alle *elementaren* Felder der Theorie koppeln,

Z(J): das erzeugende Funktional für die allgemeinen Greenschen Funktionen,

9.3. WECHSELWIRKENDE THEORIE

z: die (Matrix der) Wellenfunktionsrenormierung,

z = 1.

- K(x-y): den Wellenoperator; d.h. der inverse Propagator für das freie Feld, das von J(y) erzeugt wird und in $\Phi_{ein}(x)$ propagiert,
 - $\Phi_{ein}(x)$: einlaufende asymptotische Felder (freie Felder, kanonische Vertauschungsrelationen).

9.3.1 Klassische Näherung

In der klassischen Näherung ist

$$K(x-y) = \frac{\delta^2 \Gamma_{cl}}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)}$$
(9.3.2)

und

Wir führen nun noch über

$$S = : \Sigma : Z_{\mid J=0} \tag{9.3.4}$$

den Operator Σ ein und diskutieren kurz seine Wirkung. Entwickelt und angewandt bis zu einer Anzahl n der Ableitungen $\delta/\delta J(y)$ erzeugt er die allgemeine Greensche Funktion $G(y_1, \ldots, y_n)$. Die entsprechenden Faktoren $\int dy K(x - y)$ amputieren deren äußere Linien und führen dafür die Faktoren $\int dx \Phi_{ein}(x)$ ein. Damit wird die amputierte Greensche Funktion auf die Massenschalen gesetzt, denn die Felder Φ_{ein} erfüllen ja die freien Gleichungen.

Wir werden nun den Kommutator $[: \Sigma :, S]$ der funktionalen Differentialoperatoren¹ berechnen und zeigen, daß ein Fockraumoperator Q existiert mit

$$[\mathcal{S}, : \Sigma:]Z_{|_{J=0}} = -[Q, :\Sigma:]Z_{|_{J=0}} = -[Q, S].$$
(9.3.5)

Da

$$[:\Sigma:,\mathcal{S}]Z\Big|_{J=0} = 0 , \qquad (9.3.6)$$

haben wir dann unser Ziel erreicht, wenn Q auch noch mit dem Operator (9.2.117) zusammenfällt.

Der Kommutator $[\mathcal{S}, :\Sigma:]$ ist von der Form

$$[X, e^{Y}] = [X, Y] + \frac{1}{2!} ([X, Y]Y + Y[X, Y]) + \frac{1}{3!} ([X, Y]Y^{2} + Y[X, Y]Y + Y^{2}[X, Y]) + \dots$$
(9.3.7)

(9.3.3)

 $^{{}^{1}\}mathcal{S}$ steht für die BRS-Transformation auf Z.

Wir werden sehen, daß [X, Y] mit Y kommutiert, und können damit die Reihe umordnen

$$[X, e^{Y}] = [X, Y]e^{Y}$$
(9.3.8)

Die expliziten Ergebnisse sind die folgenden

$$X \equiv S \equiv \int J^{\mu} \frac{\delta}{\delta \rho^{\mu}} - j_{+} \frac{\delta}{\delta \sigma} + J_{\varphi} \frac{\delta}{\delta Y_{\varphi}} - j_{-} \frac{\delta}{\delta J_{B}}$$
(9.3.9)

$$Y \equiv \int \phi \Gamma_{2} \frac{\delta}{\delta J}$$

$$\equiv \int \left(\sigma^{H} \Gamma_{HH} \frac{\delta}{\delta J_{H}} + A^{\mu} \Gamma_{\mu \pi} \frac{\delta}{\delta J_{\pi}} + A^{\mu} \Gamma_{\mu B} \frac{\delta}{\delta J_{B}} + \pi \Gamma_{\pi \pi} \frac{\delta}{\delta J_{\pi}} + \pi \Gamma_{\pi \nu} \frac{\delta}{\delta J_{\nu}} + \pi \Gamma_{\pi B} \frac{\delta}{\delta J_{B}} + \pi \Gamma_{\pi \pi} \frac{\delta}{\delta J_{\pi}} + \pi \Gamma_{\pi \nu} \frac{\delta}{\delta J_{\nu}} + B \Gamma_{B\pi} \frac{\delta}{\delta J_{\pi}} + c_{+} \Gamma_{c+c-} \frac{\delta}{\delta j_{-}} + c_{-} \Gamma_{c-c+} \frac{\delta}{\delta j_{+}} \right)$$
(9.3.10)

$$[X,Y] = -\int dx dy \Big(\sigma^{H}(x)\Gamma_{HH}(x-y)\frac{\delta}{\delta Y_{H}(y)} + (A^{\mu}\Gamma_{\mu\nu} + B\Gamma_{B\nu} + \pi\Gamma_{\pi\nu})\frac{\delta}{\delta\rho_{\nu}} + (\pi\Gamma_{\pi\pi} + A^{\mu}\Gamma_{\mu\pi} + B\Gamma_{B\pi})\frac{\delta}{\delta Y_{\pi}} - c_{-}\Gamma_{c_{-}c_{+}}\frac{\delta}{\delta\sigma} - c_{+}\Gamma_{c_{+}c_{-}}\frac{\delta}{\delta J_{B}}\Big)$$

$$(9.3.11)$$

(Indizes "ein" und Ortsraumargumente sind unterdrückt.) Mit diesem Zwischenergebnis ist offensichtlich, daß Y mit [X, Y] kommutiert.

Als Beitrag zu : $[X,Y] \ e^Y$: $\ Z_{\Bigl|_{J=0}}$ betrachten wir zuerst den des einlaufenden

Higgsfeldes.

$$\int dxdy : \sigma^{H}(x)\Gamma_{HH}(x-y)\frac{\delta}{\delta Y_{H}(y)}Y(1)\dots Y(n) : Z_{|J=0}$$

$$= \int dxdy : \sigma^{H}(x)\Gamma_{HH}(x-y)Y(1)\dots Y(n) : i[-\frac{e}{2}c_{+}^{i}\pi^{i}](y)Z_{|J=0}$$
(9.3.12)

Die Gleichung drückt aus, daß $\delta/\delta Y_H$ in der klassischen Näherung die Einsetzung

$$s\sigma^H = -\frac{e}{2}c^i_+\pi^i \tag{9.3.13}$$

erzeugt. Ein relevantes Diagramm hat also in dieser Ordnung z.B. die Form



und wir müssen untersuchen, ob ein Ein-Teilchen-Pol $1/(p^2 - m_H^2)$ entwickelt werden kann, so daß der Faktor $\tilde{\Gamma}_{HH}(p) = p^2 - m_H^2$ im Limes $p^2 \to m_H^2$ kompensiert wird. Nur dann wäre dieser Beitrag von Null verschieden. Benutzen wir die Impulserhaltung (und nehmen alle Impulse als einlaufende an), so gilt

$$p = l_1 + l_2,$$

$$l_1 + q_1 + q_2 = 0,$$

$$l_2 + q_3 + q_4 + q_5 = 0.$$

(9.3.14)

Mit der Abkürzung $q \equiv q_3 + q_4 + q_5$ enthält die Greensche Funktion $\tilde{G}(p; q_1 \dots q_5)$ also die Faktoren

$$\tilde{G}(p; q_1 \dots q_5) \sim \frac{1}{l_1^2 - m_o^2} \frac{1}{l_2^2 - m_o^2} \\ \sim \frac{1}{(p+q)^2 - m_o^2} \frac{1}{q^2 - m_o^2}$$

$$(9.3.15)$$

d.h. ein Pol in $p^2-m_H^2$ ist unmöglich. Dieser Beitrag verschwindet, d.h.

$$\int dxdy : \sigma^H(x)\Gamma_{HH}(x-y)\frac{\delta}{\delta Y_H(y)} \Sigma : Z_{\mid J=0} = 0$$
(9.3.16)

Ganz analog diskutieren wir den Beitrag

$$\int dx dy : \pi \Gamma_{\pi\pi} Y(1) \dots Y(n) : \left. \frac{\delta}{\delta Y_{\pi}} Z_{\left| J=0 \right.} \right.$$

$$= \int dx dy : \pi \Gamma_{\pi\pi} Y(1) \dots Y(n) : \left. i \left[\frac{e}{2} \varepsilon_{\dots} c_{+} \pi + \frac{e}{2} c_{+} \sigma^{H} + m c_{+} \right] \cdot Z_{\left| J=0 \right.} \right.$$

$$(9.3.17)$$

Die nicht-linearen Terme der Einsetzung tragen wie im vorigen Fall nicht bei – das obige Argument war ein kinematisches und bezog sich nicht auf den Feldtyp. Der lineare Term der Einsetzung führt zu einem Diagramm des Typs



Fig. 9.3.2: Einsetzung linear im Feld

mit dem analytischen Ausdruck $(\Gamma_{\pi\pi}=-(\Box_y+m_o^2)\delta(x-y))$

$$\int dx dy dz \pi(x) (-1) (\Box_y + m_o^2) \delta(x - y) \Delta_c(y - z; m_o^2) G(z, z_1 \dots z_n)$$

$$= i \int dx \pi(x) G(x; z_1 \dots z_n)$$
(9.3.18)

d.h in den Greenschen Funktionen

$$G(y; z_1 \dots z_n) = \langle (Tc_+(y)\phi(z_1)\dots\phi(z_n)) \rangle$$
(9.3.19)

ist effektiv c_+ durch π ersetzt worden; $G(y; z_1 \dots z_n)$ hat einen Ein-Teilchen-Pol.

Entsprechendes gilt für die restlichen Beiträge in (9.3.11): die linearen Anteile tragen bei, die nicht-linearen nicht.

$$\frac{\delta Z}{\delta Y_{\pi}} = i [\frac{e}{2} \varepsilon_{\dots} c_{+} \pi + \frac{e}{2} c_{+} \sigma^{H} + m c_{+}] \cdot Z \to m \frac{\delta Z}{\delta j_{+}}$$
(9.3.20)

$$\frac{\delta Z}{\delta \rho_{\nu}} = i [\partial^{\nu} c_{+} + i [c_{+}, A^{\nu}]] \cdot Z \to \partial^{\nu} \frac{\delta Z}{\delta j_{+}}$$
(9.3.21)

Zusammengefaßt erhalten wir demnach

$$\begin{bmatrix} : \Sigma : , \mathcal{S}]Z_{\mid J=0} \\ =: \int \left((A^{\mu}\Gamma_{\mu\nu}\partial_{y}^{\nu} + A^{\mu}\Gamma_{\mu\pi}m + \pi\Gamma_{\pi\pi}m + \pi\Gamma_{\pi\nu}\partial_{y}^{\nu} + B\Gamma_{B\nu}\partial_{y}^{\nu} + B\Gamma_{B\pi}m)\frac{\delta}{\delta j_{+}} \right) \\ - c_{+}\Gamma_{c_{+}c_{-}}\frac{\delta}{\delta J_{B}} \sum \begin{bmatrix} Z_{\mid J=0} \end{bmatrix}$$

$$(9.3.22)$$

Nun definieren wir einen Operator Qso, daß er gerade die BRS-Transformationen der freien Felder erzeugt

$$Q : \delta_Q A_\mu = \partial_\mu c_+ \qquad \delta_Q \sigma^H = 0$$

$$\delta_Q \pi = m c_+ \qquad \delta_Q c_+ = 0$$

$$\delta_Q c_- = B \qquad \delta_Q B = 0$$
(9.3.23)

$$Q\Gamma \equiv -i \int \left(\partial^{\mu} c^{i}_{+} \frac{\delta}{\delta A^{i\mu}} + m c^{i}_{+} \frac{\delta}{\delta \pi^{i}} + B^{i} \frac{\delta}{\delta c^{i}_{-}} \right) \Gamma$$
(9.3.24)

$$QZ_c \equiv -i \int \left(\partial_\mu \frac{\delta Z_c}{\delta j_+} (-J_\mu) + m \frac{\delta Z_c}{\delta j_+} (-J_\pi) + \frac{\delta Z_c}{\delta J_B} j_- \right)$$
(9.3.25)

$$QZ \equiv \int \left(-J^{\mu} \partial_{\mu} \frac{\delta}{\delta j_{+}} - m J_{\pi} \frac{\delta}{\delta j_{+}} + j_{-} \frac{\delta}{\delta J_{B}} \right) Z$$
(9.3.26)

Der Kommutator $[Q, \ : \Sigma: \]Z_{\Big|_{J=0}}$ läßt sich genau wie vorher berechnen

$$\begin{split} & [Q, : \Sigma :]Z_{\mid J=0} \\ &= -: \int \Bigl((A^{\mu} \Gamma_{\mu\nu} (-\partial^{\nu}) + A^{\mu} \Gamma_{\mu\pi} (-m) + \pi \Gamma_{\pi\pi} (-m) \\ &+ \pi \Gamma_{\pi\nu} (-\partial^{\nu}) + B \Gamma_{B\nu} (-\partial^{\nu}) + B \Gamma_{B\pi} (-m)) \frac{\delta}{\delta j_{+}}) \\ &+ c_{+} \Gamma_{c+c-} \frac{\delta}{\delta J_{B}} \Bigr) \Sigma : Z_{\mid J=0} \end{split}$$
(9.3.27)

Der Vergleich mit (9.3.22) zeigt also

$$[:\Sigma:,\mathcal{S}]Z_{|_{J=0}} = [Q,:\Sigma:]Z_{|_{J=0}}$$
 (9.3.28)

Damit folgt schließlich

$$0 = [Q, S] = [:\Sigma: ,S]Z_{|J=0} = :\Sigma: SZ_{|J=0} - S(:\Sigma: Z)_{|J=0}$$
(9.3.29)

(Der erste Teil des Kommutators verschwindet, weil SZ = 0 für alle Werte der Quellen gilt und damit auch für alle Ableitungen; der zweite, weil S für J = 0 verschwindet.)

Damit ist in der klassischen Näherung die Unitarität gezeigt : Q charakterisiert den physikalischen Unterraum \mathcal{V}_{phys} und S kommutiert mit Q, d.h. bildet Elemente aus \mathcal{V}_{phys} in \mathcal{V}_{phys} ab.

9.3.2 Höhere Ordnungen

Für die Behandlung der höheren Ordnungen stellt es sich als zweckmäßig heraus, im Operator

$$S = : e^{\int dx dy \Phi_{ein}(x) K(x-y) z^{-1} \frac{\delta}{\delta J(y)}} : Z_{|J=0}$$
(9.3.30)

eine Umdefinition vorzunehmen. Wir führen

$$\phi_{\underline{ein}}(x) = z\phi_{ein}(x) \tag{9.3.31}$$

ein und erhalten damit $z^{-1T}Kz^{-1}$ in S. Auf der Massenschale gilt aber

$$z^{-1T}Kz^{-1} = \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \tag{9.3.32}$$

und für diese Vertexfunktion können wir aus den geltenden Symmetrien Information beziehen. Genau wie in der klassischen Näherung berechnen wir den Kommutator

$$\begin{bmatrix} : \Sigma : , S]Z \Big|_{J=0} \\ =: \left(\int (\sigma_{\underline{ein}}^{H} \Gamma_{HH} \frac{\delta}{\delta Y^{h}} + A_{\underline{ein}}^{\mu} \Gamma_{\mu\pi} \frac{\delta}{\delta Y_{\pi}} + \pi_{\underline{ein}} \Gamma_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta \rho_{\nu}} + A_{\underline{ein}}^{\mu} \Gamma_{\pi\pi} \frac{\delta}{\delta Y_{\pi}} + \pi_{\underline{ein}} \Gamma_{\pi\nu} \frac{\delta}{\delta \rho_{\nu}} + \pi_{\underline{ein}} \Gamma_{\pi\pi} \frac{\delta}{\delta Y_{\pi}} \\ + B_{\underline{ein}} \Gamma_{B\nu} \frac{\delta}{\delta \rho_{\nu}} + B_{\underline{ein}} \Gamma_{B\pi} \frac{\delta}{\delta Y_{\pi}} \\ - c_{-\underline{ein}} \Gamma_{c-c_{+}} \frac{\delta}{\delta \sigma} - c_{+\underline{ein}} \Gamma_{c+c_{-}} \frac{\delta}{\delta J_{B}}) \right) \Sigma : \Big|_{J=0}.$$

$$(9.3.33)$$

Nun müssen wir untersuchen, welche der von $\delta/\delta Y_H$, $\delta/\delta \rho_{\nu}$, $\delta/\delta Y_{\pi}$, $\delta/\delta \sigma$, $\delta/\delta J_B$ erzeugten Einsetzungen in Z Ein-Teilchen-Pole haben können.

$$\frac{\delta}{\delta Y_{H}} \left(\int \phi \Gamma_{2} \frac{\delta}{\delta J} \right) \dots \left(\int \phi \Gamma_{2} \frac{\delta}{\delta J} \right) Z
= \left(\left(\int \phi \Gamma_{2} \frac{\delta}{\delta J} \right) \dots \right) i \left[-\frac{e}{2} c_{+}^{i} \pi^{i} + Korr. \right] \cdot Z$$
(9.3.34)

In der Störungstheorie kann diese Einsetzung *nicht* zu einem Pol bei m_H^2 führen, denn die $\phi \pi$ -Ladung könnte höchstens einen Pol bei m_o^2 erlauben. D.h. dieser Beitrag verschwindet auf der Massenschale.

$$\frac{\delta}{\delta\rho_{\nu}} \left(\int \phi \Gamma_2 \frac{\delta}{\delta J} \right) \dots \left(\int \phi \Gamma_2 \frac{\delta}{\delta J} \right) Z$$

$$= \left(\int \phi \Gamma_2 \frac{\delta}{\delta J} \right) \dots \int \phi \Gamma_2 \frac{\delta}{\delta J} i [\partial^{\nu} c_+ + i [c_+, A^{\nu}] + Korr.] \cdot Z$$
(9.3.35)

Wie in der klassischen Näherung ist hier ein Pol-Beitrag bei $p^2=m_o^2$ zu erwarten. Diagrammatisch:



Analytisch:

$$\left(\int \phi \Gamma_2 \frac{\delta}{\delta J} \right) \dots \left(\int \phi \Gamma_2 \frac{\delta}{\delta J} \right) \frac{\delta}{\delta \rho_{\nu}} Z_{\left| p^2 = m_o^2 \right|}$$

$$= - \left(\int \phi \Gamma_2 \frac{\delta}{\delta J} \right) \dots \left(\int \phi \Gamma_2 \frac{\delta}{\delta J} \right) \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \rho_{\nu} \delta c_+}_{\left| p^2 = m_o^2 \right|} \cdot \frac{\delta Z}{\delta j_+} + \text{Nicht-Pol-Beiträge} .$$

$$(9.3.36)$$

(Der Faktor $\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \rho_{\nu} \delta c_+}$ entspricht der in Abb. 9.3.3 umstrichelten Summe von Unterdiagrammen.)

Ganz analog führt $\delta/\delta Y_{\pi}$ effektiv zu

$$\frac{\delta}{\delta Y_{\pi}} Z \longrightarrow -\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta Y_{\pi} \delta c_+} \Big|_{p^2 = m_o^2} \cdot \frac{\delta Z}{\delta j_+} .$$
(9.3.37)

Die Einsetzung $\delta/\delta\sigma$ hingegen liefert ähnlich wie $\delta/\delta Y_H$ keinen Beitrag, denn in der störungstheoretischen Behandlung des gegenwärtigen Modells gibt es kein *Teilchen* mit $\phi\pi$ -Ladung 2. Der Term mit $\delta/\delta J_B$ trägt ganz naiv bei. Führen wir noch geeignete Funktionen ein:

$$\frac{\tilde{\delta}}{\delta c_{+}(p)} \frac{\delta}{\delta \rho_{\nu}(o)} \Gamma_{2}(0) = i p^{\nu} f(p), \qquad f = 1 + O(\hbar)$$
(9.3.38)

$$\frac{\tilde{\delta}}{\delta c_{+}(p)}\frac{\delta}{\delta Y_{\pi}(o)}\Gamma_{2}(0) = mg(p), \qquad g = 1 + O(\hbar)$$
(9.3.39)

so können wir zusammenfassend schreiben

$$\begin{bmatrix} : \Sigma : , \mathcal{S}]Z_{\mid J=0} \\ =: \int dp \left(A^{\mu}_{\underline{ein}}(p) \left(\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}(p) i p^{\nu} f(p) + \tilde{\Gamma}_{\mu\pi}(p) mg(p) \right) \frac{\delta}{\delta j_{+}(p)} \\ \pi_{\underline{ein}}(p) \left(\tilde{\Gamma}_{\pi\nu}(p) i p^{\nu} f(p) + \tilde{\Gamma}_{\pi\pi}(p) mg(p) \right) \frac{\delta}{\delta j_{+}(p)} \\ B_{\underline{ein}}(p) \left(\tilde{\Gamma}_{B\nu}(p) i p^{\nu} f(p) + \tilde{\Gamma}_{B\pi}(p) mg(p) \right) \frac{\delta}{\delta j_{+}(p)} \\ - c_{+\underline{ein}} \tilde{\Gamma}_{c_{+}c_{-}}(p) \frac{\delta}{\delta J_{B}(p)} \right) \Sigma : Z_{\mid J=0} \end{aligned}$$
(9.3.40)

Auf den Massenschalen der jeweiligen Felder definieren wir einen OperatorQgemäß

$$\begin{split} i[Q, A^{\mu}_{\underline{ein}}(p)] &= ip^{\mu} f(p) c_{+\underline{ein}}(p) & i[Q, \sigma^{H}_{\underline{ein}}] = 0 \\ i[Q, \pi_{\underline{ein}}(p)] &= mg(p) c_{+\underline{ein}}(p) & i[Q, B_{\underline{ein}}] = 0 \\ i\{Q, c_{\underline{ein}}(p)\} &= B_{\underline{ein}}(p) & i\{Q, c_{+\underline{ein}}\} = 0 \end{split}$$
(9.3.41)

Diese Transformationen wie oben in der klassischen Näherung umgesetzt auf ${\cal Z}$ führen zu

$$-[Q, : \Sigma:]Z_{|_{J=0}} = [: \Sigma: , \mathcal{S}]Z_{|_{J=0}} = 0.$$
(9.3.42)

Man kann nun zeigen (Kugo/Ojima I,II), daß wegen der Massenschalenbedingung und der Wellenfunktionsrenormierung z, die in $\Phi_{\underline{ein}}$ enthalten ist, dieser neue Operator Q gerade mit dem der klassischen Näherung übereinstimmt. D.h. die Charakterisierung der physikalischen Zustände bleibt erhalten und wegen (9.3.42) kommutiert Q mit S. Damit ist die Unitarität bewiesen.

Wir wollen nun noch den Umfang der gewonnenen Ergebnisse kommentieren.

Formal gilt der Beweis auch für die ungebrochene Theorie (d.h. mit masselosen Vektoren). Allerdings sind dann einige Zwei-Punkt-Funktionen infrarot-divergent und die S-Matrix existiert nicht ohne weiteres. In Theorien wie dem Standard-Modell, wo vor und nach der Symmetriebrechung ein U(1)-Faktor mit masselosem Vektor auftritt, läßt sich diese Infrarotdivergenz beherrschen, indem man eine explizite Masse für den U(1)-Vektor einführt und diese nach der Berechnung physikalischer Größen gegen Null gehen läßt. In Modellen mit einfacher Gruppe, bei der ein U(1)-Faktor mit masselosem Vektor erst nach der Brechung identifizierbar ist (z.B. Georgi-Glashow, SU(5)), versagt dieses Verfahren.

9.4 Bibliographische Angaben

Das Modell, das diesem Kapitel zugrundeliegt, ist von Becchi (Erice) vorgestellt worden. In Logik und Technik folgen wir zunächst Kugo/Ojima I,II, aber dann Becchi (Les Houches).

BIBLIOGRAPHIE

Becchi/Rouet/Stora 76

C. BECCHI, A. ROUET, R. STORA, Renormalization of Gauge Theories, Annals of Physics **98** (1976) 287.

Becchi (Erice)

C. BECCHI, Gauge Field Models, in: Renormalization Theory, eds. G. Velo and A.S. Wightman, (D. Reidel 1976).

Becchi (Les Houches)

C. BECCHI, Lectures on the Renormalization of Gauge Theories, in: Relativity, groups and topology II, eds. B.S. DeWitt and R. Stora, (Elsevier 1984). Bjorken/Drell II

J.D. BJORKEN, S.D. DRELL, Relativistische Quantenfeldtheorie, (BI Hochschultaschenbuch 101/101a 1967).

Bogoliubov/Shirkov

N.N. BOGOLIUBOV, D.V.SHIRKOV, Introduction to the Theory of Quantized Fields, (Wiley-Interscience 1959).

Breitenlohner/Maison/Sibold (Ringberg)

P. Breitenlohner, D. Maison and K. Sibold (Eds.), Renormalization of Quantum Field Theories with Non-linear Field Transformations, Lecture Notes in Physics 303 (Springer-Verlag 1988).

Brout/Englert 64

R. BROUT, F. ENGLERT, Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons, *Phys. Rev. Lett.*, **13** (1964) 321.

Clark (Lafayette)

T.E. CLARK, Guts, Susy and Susyguts, Lecture Notes in Physics, (Purdue University 1983).

Clark/Lowenstein 76

T.E. CLARK, J. H. LOWENSTEIN, Generalization of Zimmermann's Normal-Product Identity, *Nucl. Phys.* **B111** (1976) 109.

Epstein/Glaser (Erice)

H. EPSTEIN, V. GLASER, Adiabatic Limit in Perturbation Theory, in: Renormalization Theory, eds. G. Velo and A.S. Wightman, (D. Reidel 1976).

Gasiorovicz

S. GASIOROWICZ, Elementary Particle Physics, (Wiley 1966).

Goldstone 61

J. GOLDSTONE, Field Theories with "Superconductor" Solutions, Il Nuovo Cimento, XIX (1961) 154.

Hepp (Les Houches)

K. HEPP, Renormalization Theory, in: Statistical Mechanics and Quantum Field Theory, eds. C. DeWitt, R. Stora (Gordon & Breach, 1971).

Higgs 64

P.W. HIGGS, Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons, *Phys. Rev. Lett*, **13** (1964) 508.

Higgs 66

P.W. HIGGS, Spontaneous Symmetry Breakdown without Massless Bosons, *Phys. Rev.*, **145** (1966) 1156.

Kibble 66

T.W.B. KIBBLE, Symmetry Breaking in Non-Abelian Gauge Theories, *Phys. Rev.*, **155** (1967) 1554.

Kugo/Ojima I 78

T. KUGO, I. OJIMA, Manifestly Covariant Canonical Formulation of the Yang-Mills Field Theories. I, Prog. Theor. Phys., **60** (1978) 1869.

Kugo/Ojima II 79 T. Kugo, I. Ouwa, Manife

T. KUGO, I. OJIMA, Manifestly Covariant Canonical Formulation of the Yang-Mills Field Theories. II, *Prog. Theor. Phys.*, **61** (1979) 294. Kugo/Ojima III 79

T. KUGO, I. OJIMA, Local covariant Operator Formalism of Non-Abelian Gauge Theories and Quark Confinement Problem, *Suppl. Prog. Theor. Phys.*, **66** (1979) 1.

Lam72

Y.-M.P. LAM, Perturbation Lagrangian Theory for Scalar Fields – Ward-Takahashi Identity and Current Algebra, *Phys. Rev.*, **D6** (1972) 2145.

Lam 72

Y.-M. P. LAM, Perturbation Lagrangian Theory for Dirac Fields – Ward-Takahashi Identity and Current Algebra, *Phys. Rev.*, **D6** (1972) 2161. Lowenstein 71

J.H. LOWENSTEIN, Differential Vertex Operations in Lagrangian Field Theory, Commun. math. Phys., **24** (1971) 1.

Lowenstein (Maryland)

J. LOWENSTEIN, Seminars on Renormalisation Theory, Vol. II: Normal Product Methods in Renormalised Perturbation Theory, Technical Report No. 73-063 (1972).

Lowenstein/Zimmermann 75

J.H. LOWENSTEIN, W. ZIMMERMANN, The Power Counting Theorem for Feynman Integrals with Massless Propagators, *Commun. math. Phys.*, **44** (1975) 73. Lowenstein (Erice)

J.H. LOWENSTEIN, BPHZ Renormalization, in: Renormalization Theory, eds. G. Velo and A.S. Wightman, (D. Reidel 1976).

Lowenstein 76

J.H. LOWENSTEIN, Convergence Theorems for Renormalized Feynman Integrals with Zero-mass Propagators, Commun. math. Phys., **47** (1976) 53. Lowenstein/Speer 76

J.H. LOWENSTEIN, E.R. SPEER, Distributional Limits of Renormalized Inte-

grals with Zero-Mass Denominators, *Commun. math. Phys.*, **47** (1976) 43. Mandelstam 62

S. MANDELSTAM, Quantum Electrodynamics Without Potentials, Annals of Physics, ${\bf 19}$ (1962), 1-24.

O'Raifeartaigh

L. O'RAIFEARTAIGH, Hidden gauge symmetry, *Rep. Prog. Phys.*, **42** (1979) 159. Piguet 74

O. PIGUET, Construction of a Strictly Renormalizable Effective Lagrangian for the Massive Abelian Higgs Model, *Commun. math. Phys.*, **37** (1974) 19. Piguet I (Genève)

O. PIGUET, Renormalisation en Théorie Quantique des Champs, Troisième Cycle de la Physique, Genève, Semestre d'hiver 1982-1983.

Piguet II (Genève)

O. PIGUET, Renormalisation des Theories de Jauge, Troisieme Cycle de la Physique, Genève, Semestre d'été 1983.

Piguet/Sibold

O. PIGUET, K. SIBOLD, Renormalized Supersymmetry, in: Progress in Physics, eds. A. Jaffe, D. Ruelle, (Birkhäuser 1986).

 $\mathbf{Schweber}$

S.S. SCHWEBER, An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory, (Harper & Row, 1964).

Speer (Erice)

E.R. SPEER, Dimensional and Analytic Renormalization, in: Renormalization Theory, eds. G. Velo and A.S. Wightman, (D. Reidel 1976).

Stora73

R. STORA, Introduction à la quantification des champs, in: Théorie des Champs, eds. E. Brezin, J. Iliopoulos, C. Itzykson, R. Stora, GIF 73, 24 Septembre–6 Octobre 1973.

Weinberg 60

S. WEINBERG, High-Energy Behavior in Quantum Field Theory, *Phys. Rev.*, **118** (1960), 838.

Zimmermann 68

W. ZIMMERMANN, The Power Counting Theorem for Minkowski Metric, Commun. math. Phys., **11** (1968) 1.

Zimmermann 69

W. ZIMMERMANN, Convergence of Bogoliubov's Method of Renormalization in Momentum Space, *Commun. math. Phys.*, **15** (1969) 208.

Zimmermann73

W. ZIMMERMANN, Composite Operators in the Perturbation Theory of Renormalizable Interactions, Annals of Physics, 77 (1973) 536.

Zimmermann 77

W. ZIMMERMANN, Normal Products and the Short Distance Expansion in the

Perturbation Theory of Renormalizable Interactions, Annals of Physics, **77** (1973) 570.

Zimmermann (Erice)

W. ZIMMERMANN, The Power Counting Theorem for Feynman Integrals with Massless Propagators, in: Renormalization Theory, eds. G. Velo and A.S. Wightman, (D. Reidel 1976).