

Zusatzaufgaben Theoretische Mechanik

Abgabe 01.02.2013 vor der Vorlesung

40. Wir betrachten ein Teilchen, dessen Lagrangefunktion in einem Inertialsystem K' durch

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}'^2 - U(\vec{r}')$$

gegeben ist. Sei K ein Bezugssystem, das in K' mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ rotiert.

a) Bestimmen Sie im rotierenden System K die Lagrangefunktion, die kanonisch konjugierten Impulse, die Hamiltonfunktion und die Hamiltonschen Gleichungen. Ist die Hamiltonfunktion eine Bewegungskonstante?

b) Zeigen Sie, daß die Hamiltonfunktion als Energie des Systems interpretiert werden kann. *Hinweis:* Zerlegen Sie die Hamiltonfunktion in kinetische und potentielle Energie (gemessen in K) und ordnen Sie die Anteile der potentiellen Energie den Kräften bzw. Scheinkräften zu.

41. Wir betrachten die Bewegung einer Punktmasse m , die unter dem Einfluß der Schwerkraft reibungsfrei auf einem Stab gleitet, der unter einem festen Winkel $\theta < \frac{\pi}{2}$ und mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die vertikale Achse durch seinen Mittelpunkt rotiert. Der Stab kann als beliebig lang angenommen werden.

a) Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion des Systems und lösen Sie die Hamiltonschen Gleichungen.

b) Lösen Sie die Hamilton-Jacobi-Gleichung und bestimmen Sie daraus die Bahnkurven im Phasenraum. Drücken Sie unter Verwendung des Ergebnisses von a) die beim Abseparieren der Zeit auftretende Konstante durch Anfangsort und Anfangsgeschwindigkeit aus und interpretieren Sie sie als Energie des Systems.

42. Wir betrachten das Zweikörperproblem. Bezeichne \vec{P} den Gesamtimpuls, H_{rel} die Hamiltonfunktion der Relativbewegung und \vec{L}_{rel} den Relativdrehimpuls.

a) Zeigen Sie, daß die Funktionen H_{rel} , P_1 , P_2 , P_3 , $L_{\text{rel},3}$ und \vec{L}_{rel}^2 in Involution stehen.

b) Berechnen Sie die Gradienten dieser Funktionen und begründen Sie, daß diese (zumindest auf einer offenen dichten Teilmenge des Phasenraums) linear unabhängig sind.