Übungsaufgaben Theoretische Mechanik

Abgabe 25.01.2013 vor der Vorlesung

37. Wir betrachten die erzeugenden Funktionen 3. Art $S_3 = S_3(p, Q)$ (p, Q als unabhängige Variable) und 4. Art $S_4 = S_4(p, P)$ (p, P als unabhängige Variable) einer kanonischen Transformation.

a) Leiten Sie die Gleichungen her, die die Transformation definieren.

b) Zeigen Sie die Identitäten

$$\frac{\partial q^i}{\partial Q^j} = -\frac{\partial P_j}{\partial p_i} \quad \text{(3. Art)}, \qquad\qquad \frac{\partial q^i}{\partial P_j} = -\frac{\partial Q^j}{\partial p_i} \quad \text{(4. Art)}.$$

38. Bestimmen Sie ein vollständiges Integral der Hamilton-Jacobi-Gleichung für einen harmonischen Oszillator mit der Masse m und der Kraftkonstante k und bestimmen Sie daraus die Bahnkurven $\big(q(t), p(t)\big)$.

39. Die Hamilton-Funktion des ebenen Zweizentrenproblems ist

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2} - \frac{\alpha}{r_1} - \frac{\alpha}{r_2}\,,$$

wobei r_i den Abstand des Massepunktes vom i-ten Zentrum bezeichnet und die Masse 1 gesetzt wurde. Wir definieren elliptische Koordinaten ξ, η durch die Gleichungen

$$x = d\cosh\alpha\cos\beta\,, \quad y = d\sinh\alpha\sin\beta\,, \qquad \xi = 2d\cosh\alpha\,, \quad \eta = 2d\cos\beta \qquad \forall \;\; \alpha, \beta$$

wobei x, y kartesische Koordinaten sind und die Zentren im Abstand $2d$ symmetrisch zum Ursprung auf der x-Achse liegen. Bestimmen Sie die zu ξ, η kanonisch konjugierten Impulse p_ξ, p_η und zeigen Sie, daß die Hamilton-Funktion in diesen Koordinaten die folgende Gestalt besitzt:

$$H = \frac{2\big(\xi^2 - 4d^2\big)p_\xi^2 + 2\big(4d^2 - \eta^2\big)p_\eta^2 - 4\alpha\xi}{\xi^2 - \eta^2}\,.$$