Universität Leipzig, Institut für Theoretische Physik Prof. Dr. Gerd Rudolph

Übungsaufgaben Theoretische Mechanik

Abgabe 18.01.2013 vor der Vorlesung

34. Bestimmen Sie für die folgenden Beispiele die kanonisch konjugierten Impulse, führen Sie die Legendretransformation aus und geben Sie die Hamiltonfunktion und die Hamiltonschen Gleichungen an:

a) Kepler-Problem:

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + \frac{k}{r}\,,$$

b) ebenes mathematisches Pendel der Masse m_2 und Länge l, das an einer Masse m_1 aufgehängt ist, die reibungsfrei auf einem horizontalen Stab gleitet und an dem einen Ende des Stabes mit einer Feder der Federkonstante k befestigt ist:

$$L(x, \varphi, \dot{x}, \dot{\varphi}) = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + m_2 l \dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi - \frac{k}{2}x^2 + m_2 g l \cos\varphi\,,$$

wobei x die Koordinate von m_1 und φ der Auslenkwinkel des Pendels aus der Vertikalen ist.

c) schwerer symmetrischer Kreisel:

$$L(\varphi, \psi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}) = \frac{I_\perp}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) + \frac{I_\parallel}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2 - mgl\cos\theta\,,$$

wobei φ, ψ, θ die Eulerschen Winkel und $I_\parallel$ bzw. $I_\perp$ die Hauptträgheitsmomente (bezüglich der Kreiselspitze) in Richtung der Symmetrieachse bzw. senkrecht dazu sind und l der Abstand zwischen Kreiselspitze und Schwerpunkt ist.

35. Wir betrachten das Kepler-Problem. Sei

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2\mu} - \frac{\alpha}{r}\,, \qquad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}\,, \qquad \vec{A} = \frac{1}{\mu^2}\vec{p} \times (\vec{r} \times \vec{p}) - \frac{\alpha}{\mu}\frac{\vec{r}}{r} \quad \text{(Lenz-Runge-Vektor)}.$$

Zeigen Sie

$$\{L_i, H\} = \{A_i, H\} = 0\,, \quad \{L_i, L_j\} = -\epsilon_{ijk} L_k\,, \quad \{L_i, A_j\} = -\epsilon_{ijk} A_k\,, \quad \{A_i, A_j\} = \frac{2H}{\mu^3}\epsilon_{ijk} L_k\,.$$

36. a) Sei $\Psi : (q^i, p_i) \mapsto (Q^i, P_i)$ eine Transformation des Phasenraums. Die Lagrange-Klammern von Ψ sind definiert durch

$$
\begin{aligned}
[\![q^j, q^k]\!] &:= \frac{\partial P_i}{\partial q^j}\frac{\partial Q^i}{\partial q^k} - \frac{\partial P_i}{\partial q^k}\frac{\partial Q^i}{\partial q^j}\,, \\
[\![p_j, q^k]\!] &:= \frac{\partial P_i}{\partial p_j}\frac{\partial Q^i}{\partial q^k} - \frac{\partial P_i}{\partial q^k}\frac{\partial Q^i}{\partial p_j}\,, \\
[\![p_j, p_k]\!] &:= \frac{\partial P_i}{\partial p_j}\frac{\partial Q^i}{\partial p_k} - \frac{\partial P_i}{\partial p_k}\frac{\partial Q^i}{\partial p_j}\,.
\end{aligned}
$$

Zeigen Sie, daß Ψ genau dann kanonisch ist, wenn gilt

$$[\![q^j, q^k]\!] = [\![p_j, p_k]\!] = 0\,, \qquad [\![p_j, q^k]\!] = \delta^j_k\,.$$

b) Zeigen Sie, daß die folgenden Transformationen $(q, p) \mapsto (Q, P)$ kanonisch sind:

1. $Q = \ln\left(\frac{1}{q}\sin p\right)\,, \quad P = q\cot p,$
2. $Q = \arctan\frac{q}{p}\,, \quad P = \frac{1}{2}\left(q^2 + p^2\right).$