# Übungsaufgaben Theoretische Mechanik

Abgabe 14.12.2012 vor der Vorlesung

**25.** Die Lagrange-Funktion des dreidimensionalen harmonischen Oszillators ist

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right) - \frac{k_1}{2}x_1^2 - \frac{k_2}{2}x_2^2 - \frac{k_3}{2}x_3^2\,.$$

**a)** Analysieren Sie mit Hilfe des Noether-Theorems, welche der Drehimpulskomponenten $L_i$, $i = 1, 2, 3$, in Abhängigkeit von der Wahl der Parameter $k_1, k_2, k_3$ Erhaltungsgrößen sind.
**b)** Zeigen Sie, daß die Größen

$$A_{ij} = \frac{m}{2}\dot{x}_i\dot{x}_j + \frac{k}{2}x_i x_j\,, \qquad i, j = 1, 2, 3\,,$$

im Fall $k_1 = k_2 = k_3 = k$ Erhaltungsgrößen sind und beweisen Sie die Relationen

$$A_{ij}^2 = A_{ii}A_{jj} - \frac{k}{4m}L_l^2\,, \qquad i,\ j,\ l \text{ paarweise verschieden.}$$

**26.** Zeigen Sie, daß die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m}{2}\,\frac{\dot{\vec{r}}^{\,2}}{(1 + g\vec{r}^{\,2})^2}$$

($g$ ist eine Konstante) unter der infinitesimalen Transformation

$$\vec{r} \mapsto \vec{r} + \vec{\alpha}(1 - g\vec{r}^{\,2}) + 2g\vec{r}(\vec{\alpha}\vec{r}) + \mathrm{O}(\vec{\alpha}^2)$$

mit den infinitesimalen Parametern $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ invariant ist. Geben Sie die zugehörigen Erhaltungsgrößen an.

**27.** Wir betrachten ein Teilchen der Masse $m$ im Potential $U(\vec{r}, t) = V(\vec{r} - \vec{v}t)$, wobei $V$ eine beliebige differenzierbare Funktion auf $\vec{R}^3$ ist (das Profil des Potentials bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$).

**a)** Zeigen Sie, daß die Hamilton-Funktion im mitbewegten Bezugssystem eine Bewegungskonstante ist. Berechnen Sie diese Bewegungskonstante im ursprünglichen Inertialsystem.

**b)** Konstruieren Sie eine Familie von Symmetrietransformationen der Lagrangefunktion und bestimmen Sie mit Hilfe des Noether-Theorems für nichtautonome Systeme die zugehörige Bewegungskonstante.