Übungsaufgaben Quantenmechanik I

Abgabe am 03.02.2014 vor der Vorlesung

37. (Zusatz) Berechnen Sie für den Vernichtungsoperator

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, \hat{x} + \mathrm{i}\, \sqrt{\frac{1}{\hbar m\omega}}\, \hat{p} \right)$$

des eindimensionalen harmonischen Oszillators $\hat{a}(t) = \hat{U}(t)^\dagger \hat{a} \hat{U}(t)$ und vergleichen Sie mit der in der Vorlesung gefundenen Lösung $\hat{a}(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\hat{a}$ der Heisenberg-Gleichung für $\hat{a}$.

38. (Pflicht) Wir betrachten den Vernichtungsoperator $\hat{a}$ des eindimensionalen harmonischen Oszillators mit Masse m und Frequenz ω.

a) Zeigen Sie, daß die Wellenfunktionen

$$\psi_{(x_0,p_0)}(x) := A \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\, p_0\, x - \frac{m\omega}{2\hbar}\, (x - x_0)^2 \right)$$

(A ist eine Normierungskonstante) Eigenfunktionen von $\hat{a}$ sind[1] und berechnen Sie die zugehörigen Eigenwerte.

b) Zeigen Sie, daß alle Eigenvektoren von $\hat{a}$ von dieser Gestalt sind.

Hinweis: Es genügt zu zeigen, daß ein Eigenvektor bis auf einen konstanten Faktor durch seinen Eigenwert festgelegt ist. Entwickeln Sie dazu den Eigenvektor nach den Eigenvektoren $|n\rangle$ des Hamiltonoperators und leiten Sie unter Verwendung von $\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$ eine Rekursionsformel für die Entwicklungskoeffizienten her.

c) Analysieren Sie die Orts-Impuls-Unschärferelation für die Zustände $\psi_{(x_0,p_0)}$.

d) Bestimmen Sie unter Verwendung von a), b) und der aus der Vorlesung bekannten Zeitentwicklung von $\hat{a}$ im Heisenberg-Bild die Zeitentwicklung der Zustände $\psi_{(x_0,p_0)}$. Vergleichen Sie mit der klassischen Bewegung im Phasenraum des harmonischen Oszillators.

[1] Diese Zustände nennt man *kohärente Zustände*.