Universität Leipzig, Institut für Theoretische Physik Prof. Dr. Gerd Rudolph

Übungsaufgaben Quantenmechanik I

Abgabe am 27.01.2014 vor der Vorlesung

34. (Pflicht) Wir betrachten den dreidimensionalen anisotropen harmonischen Oszillator:

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + \frac{m}{2}\sum_{k=1}^{3} \omega_k^2 \hat{x}_k^2 \,.$$

Sei

$$\hat{a}_k := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega_k}{\hbar}}\hat{x}_k + i\sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega_k}}\hat{p}_k\right) \,, \qquad \hat{N}_k := \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \,.$$

a) Zeigen Sie $[\hat{a}_k, \hat{a}_l^\dagger] = \mathbb{1}\delta_{kl}$, $[\hat{N}_k, \hat{a}_l^\dagger] = \hat{a}_k^\dagger \delta_{kl}$ und $[\hat{N}_k, \hat{a}_l] = -\hat{a}_k \delta_{kl}$.

b) Zeigen Sie, daß die Operatoren $\hat{N}_1, \hat{N}_2, \hat{N}_3$ ein vollständiges System kommutierender Observablen bilden und konstruieren Sie analog zum eindimensionalen Fall eine Basis aus gemeinsamen Eigenvektoren.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Basis die Eigenwerte und Eigenräume von $\hat{H}$. Diskutieren Sie die Entartung der Eigenwerte für den Fall, daß $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ rational unabhängig sind und für den Fall $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$ (isotroper harmonischer Oszillator).

35. Wir betrachten ein geladenes Teilchen im Coulomb-Potential:

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2\mu} + \frac{k}{r} \,.$$

Der quantenmechanische Lenz-Runge-Vektor ist

$$\hat{\vec{F}} = \frac{1}{2}\left(\hat{\vec{p}} \times \hat{\vec{L}} - \hat{\vec{L}} \times \hat{\vec{p}}\right) + \mu k \frac{\hat{\vec{x}}}{r} \,.$$

Zeigen Sie:

a) $\hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{F}} = 0 = \hat{\vec{F}} \cdot \hat{\vec{L}}$,

b) $\hat{\vec{F}}^2 = 2\mu \hat{H}\left(\hat{\vec{L}}^2 + \hbar^2\right) + \mu^2 k^2$.

36. Zeigen Sie (Bezeichnungen wie in Aufgabe 35)

a) $[\hat{H}, \hat{F}_k] = 0$, d. h., die $\hat{F}_k$ sind Erhaltungsgrößen,

b) $[\hat{F}_k, \hat{F}_l] = -\mathrm{i}\,\hbar\, 2\mu\hat{H}\, \epsilon_{kls}\hat{L}_s$.