Universität Leipzig, Institut für Theoretische Physik Prof. Dr. Gerd Rudolph

Übungsaufgaben Quantenmechanik I

Abgabe am 20.01.2014 vor der Vorlesung

31. In der Vorlesung wurde die Operatoridentität

$$\hat{\vec{p}}^2 = \hat{p}_r^2 + \frac{\hat{\vec{L}}^2}{r^2}$$

bewiesen. Beweisen Sie diese Identität in Kugelkoordinaten durch Berechnung des Laplace-Operators und Vergleich mit dem bereits bekannten Ausdruck für $\hat{\vec{L}}^2$.

32. Die sphärischen Besselfunktionen sind definiert durch

$$j_l(z) = (-z)^l \left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^l \frac{\sin z}{z}\,, \qquad z \in \mathbb{R}\,.$$

a) Beweisen Sie

$$\begin{aligned}(2l+1)\, j_l(z) &= z\, j_{l+1}(z) + z\, j_{l-1}(z))\,,\\ j_l'(z) &= j_{l-1}(z) - \frac{l+1}{z}\, j_l(z)\,,\\ j_l(0) &= \delta_{l\,0}\,.\end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie unter Verwendung von a) und der Rekursionsformel

$$(2l+1)\, x\, P_l(x) = (l+1)\, P_{l+1}(x) + l\, P_{l-1}(x)\,, \qquad x \in [-1,1]\,,$$

für die Legendre-Polynome P_l die Koeffizienten a_l in der Entwicklungsformel

$$\mathrm{e}^{kr\,\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l\, j_l(kr)\, P_l(\cos\theta)\,.$$

Hinweis: Bezeichnen Sie $z = kr$ und $x = \cos\theta$, setzen Sie die Entwicklungsformel in beide Seiten der Identität

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z\,x} = \mathrm{i}\,x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z\,x}$$

ein, sortieren Sie unter Verwendung der angegebenen Relationen nach Produkten der Gestalt $j_l(z)P_k(x)$ und führen Sie einen Koeffizientenvergleich durch.

33. (Pflicht) Bestimmen Sie die Energieniveaus und die Wellenfunktionen eines Teilchens, das sich in dem kugelförmigen Potentialtopf

$$V(r) = \begin{cases} 0 & 0 \leq r \leq a \\ \infty & r > a \end{cases}$$

befindet. Geben Sie die Energieniveaus für den Fall $l = 0$ explizit an.