Übungsaufgaben Quantenmechanik I

Abgabe am 13.01.2014 vor der Vorlesung

28. Zeigen Sie ohne Verwendung der Ortsdarstellung, daß die Eigenwerte der Komponenten des Bahndrehimpulsoperators $\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{x}} \times \hat{\vec{p}}$ ganzzahlige Vielfache von $\hbar$ sind, indem Sie das Eigenwertproblem für $\hat{L}_i$ auf das Eigenwertproblem des zweidimensionalen Drehimpulsoperators $\hat{L} = \hat{x}_1\hat{p}_2 - \hat{x}_2\hat{p}_1$ zurückführen und die Ergebnisse aus Aufgabe 21 verwenden.

29. (Pflicht) Sei $|l\ m\rangle$ eine Basis aus gemeinsamen Eigenvektoren von $\hat{L}_3$ und $\hat{\vec{L}}^{\,2}$ zu den Eigenwerten $\hbar m$ bzw. $\hbar^2 l(l+1)$. Sei $\hat{x}_+ = \hat{x}_1 + \mathrm{i}\hat{x}_2$ und $\hat{P}\psi(x) = \psi(-x)$ (Paritätsoperator).

a) Zeigen Sie $\quad [\hat{L}_3, \hat{x}_+] = \hbar\hat{x}_+ \quad$ und $\quad [\hat{\vec{L}}^{\,2}, \hat{x}_+] = -2\hbar\hat{x}_3\hat{L}_+ + 2\hbar\hat{x}_+\hat{L}_3 + 2\hbar^2\hat{x}_+$.

b) Zeigen Sie, daß $\hat{x}_+ |l\ l\rangle$ ein Vielfaches von $|l+1, l+1\rangle$ ist. Folgern Sie daraus, daß $|l\ m\rangle$ ein Vielfaches von $\hat{L}_-^{l-m}\hat{x}_+^l |0\ 0\rangle$ ist. Zeigen Sie unter Verwendung dieser Tatsache und der Formel $\hat{P}\hat{x}_k\hat{P} = -\hat{x}_k$ (vgl. Aufgabe 17), daß gilt

$$\hat{P}\,|l\ m\rangle = (-1)^l\,|l\ m\rangle\ .$$

30. Wir betrachten einen Operator $\hat{\vec{V}}$, dessen Komponenten der Vertauschungsrelation $[\hat{L}_i, \hat{V}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{V}_k$ genügen[1] und setzen $\hat{V}_\pm := \hat{V}_1 \pm \mathrm{i}\hat{V}_2$.

a) Zeigen Sie

$$[\hat{L}_+, \hat{V}_+] = [\hat{L}_-, \hat{V}_-] = 0\,, \qquad [\hat{L}_3, \hat{V}_\pm] = \pm\hbar\hat{V}_\pm\,, \qquad [\hat{L}_+^k, \hat{V}_3] = -\hbar k \hat{V}_+\hat{L}_+^{k-1}\,.$$

b) Zeigen Sie, daß $\hat{V}_\pm\,|l\ m\rangle$ und $\hat{V}_3\,|l\ m\rangle$ Linearkombinationen von Basisvektoren $|l''\ m\pm 1\rangle$ bzw. $|l''\ m\rangle$ mit $l'' \leq l+1$ sind.

c) Beweisen Sie unter Verwendung von b) die folgenden Auswahlregeln für l und m: Ist $\langle l'\ m'|\,\hat{V}_i\,|l\ m\rangle \neq 0$ für ein $i = 1, 2, 3$, dann ist $|m' - m| \leq 1$ und $|l - l'| \leq 1$. Hat zusätzlich $\hat{\vec{V}}$ negative Parität, dann gilt $|l - l'| = 1$.

[1] Ein solcher Operator heißt Vektoroperator.