Universität Leipzig, Institut für Theoretische Physik Prof. Dr. Gerd Rudolph

Übungsaufgaben Quantenmechanik I

Abgabe am 06.01.2014 vor der Vorlesung

25. (Pflicht) Wir betrachten ein quantenmechanisches System mit dem Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{\vec{p}}^{\,2} + V(|\hat{\vec{x}}|)\,.$$

Seien $\hat{L}_i$ die Komponenten des Bahndrehimpulsoperators.

a) Berechnen Sie die Kommutatoren $[\hat{L}_i, \hat{x}_j]$ und $[\hat{L}_i, \hat{p}_j]$.

b) Zeigen Sie, daß die $\hat{L}_i$ Erhaltungsgrößen sind, d. h., daß $[\hat{L}_i, \hat{H}] = 0$ gilt.

26. Berechnen Sie die Komponenten $\hat{L}_i$ und das Quadrat $\hat{\vec{L}}^{\,2}$ des Bahndrehimpulsoperators in der Ortsdarstellung in Kugelkoordinaten.

27. Wir betrachten die irreduzible Darstellung mit Gesamtdrehimpulsquantenzahl j des Gesamtdrehimpulsoperators $\hat{\vec{J}}$. Sei $\{|j\ m\rangle\,|m = j, \ldots, -j\}$ die in der Vorlesung konstruierte Basis aus gemeinsamen Eigenvektoren von $\hat{J}_3$ und $\hat{\vec{J}}^{\,2}$. Berechnen Sie unter Verwendung der in der Vorlesung angegebenen Formeln

$$\begin{aligned}
\hat{J}_3\,|j\ m\rangle &= \hbar m\,|j\ m\rangle\ , \\
\hat{\vec{J}}^{\,2}\,|j\ m\rangle &= \hbar^2 j(j+1)\,|j\ m\rangle\ , \\
\hat{J}_\pm\,|j\ m\rangle &= \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\ |j\ m\pm 1\rangle
\end{aligned}$$

die Matrixelemente von $\hat{J}_1$, $\hat{J}_2$, $\hat{J}_3$ und $\hat{\vec{J}}^{\,2}$ in dieser Basis. Schreiben Sie diese Matrizen insbesondere für den Fall $j = 1$ auf.