Universität Leipzig, Institut für Theoretische Physik Prof. Dr. Gerd Rudolph

Übungsaufgaben Quantenmechanik I

Abgabe am 09.12.2013 vor der Vorlesung

19. (Pflicht) Wir betrachten den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit der Masse m und der Kraftkonstante k.

a) Beweisen Sie für die auf der Vorlesung definierten Operatoren $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ und $\hat{N}$ die Vertauschungsrelationen $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \mathbb{1}$, $[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}$, $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$.

b) Grundzustand und Grundzustandsenergie des harmonischen Oszillators sind gegeben durch

$$\psi_0 = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) \ , \quad E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \ , \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \ .$$

Wie groß ist im Grundzustand die Wahrscheinlichkeit, daß sich der Oszillator außerhalb des klassisch erlaubten Bereiches aufhält? Formulieren Sie das Ergebnis mit Hilfe der Funktion

$$\mathrm{erf}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-t}^{t} \mathrm{e}^{-y^2} \mathrm{d}x$$

("error function") und geben Sie einen Näherungswert an.

c) Berechnen Sie die mittlere quadratische Schwankung von Ort und Impuls in einem beliebigen Eigenzustand von $\hat{H}$ und diskutieren Sie die entsprechende Unschärferelation.

20. Wir betrachten den zweidimensionalen isotropen harmonischen Oszillator mit der Masse m und der Kraftkonstante k.

a) Finden Sie einen Satz von Eigenfunktionen in der Ortsdarstellung durch den Separationsansatz $\psi(x_1, x_2) = \psi_1(x_1)\,\psi_2(x_2)$. Bestimmen Sie das Spektrum von $\hat{H}$ und diskutieren Sie die Entartung der Eigenwerte.

b) Zeigen Sie, daß alle Eigenvektoren durch Anwendung der (vertauschbaren) Erzeugungsoperatoren $\hat{a}_i^\dagger$, $i = 1, 2$, auf den Grundzustand $|0\rangle$ erhalten werden können. Geben Sie einen vollständigen Satz kommutierender Observabler an.

21. Für den zweidimensionalen isotropen harmonischen Oszillator aus Aufgabe 20 definieren wir die Leiteroperatoren

$$\hat{b}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1 - \mathrm{i}\,\hat{a}_2)\,, \qquad \hat{b}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1 + \mathrm{i}\,\hat{a}_2)$$

und die zugehörigen Anzahloperatoren $\hat{N}_\pm = \hat{b}_\pm^\dagger \hat{b}_\pm$. Wir betrachten den Hamilton-Operator $\hat{H}$ und den zweidimensionalen Drehimpulsoperator

$$\hat{L} := \hat{x}_1\,\hat{p}_2 - \hat{x}_2\,\hat{p}_1\,.$$

a) Berechnen Sie alle Kommutatoren zwischen $\hat{b}_\pm$, $\hat{b}_\pm^\dagger$ und $\hat{N}_\pm$.

b) Drücken Sie $\hat{H}$ und $\hat{L}$ durch $\hat{N}_+$ und $\hat{N}_-$ aus.

c) Konstruieren Sie mit Hilfe von $\hat{b}_\pm^\dagger$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von $\hat{H}$ und $\hat{L}$. Geben Sie die Eigenwerte von $\hat{H}$ und $\hat{L}$ an und zeigen Sie, daß $\hat{H}$ und $\hat{L}$ ein vollständiges System kommutierender Observabler bilden.