Universität Leipzig, Institut für Theoretische Physik  Prof. Dr. Gerd Rudolph

# Übungsaufgaben Quantenmechanik I

Abgabe am 02.12.2013 vor der Vorlesung

**16.** Wir betrachten die Familie der Translationsoperatoren $\hat{T}_a$ auf $L^2(\mathbb{R})$, definiert durch

$$(\hat{T}_a\psi)(x) = \psi(x-a)\,, \qquad a \in \mathbb{R}\,.$$

Zeigen Sie:

**a)** $\hat{T}_a$ ist unitär und erfüllt $\hat{T}_a\hat{T}_b = \hat{T}_{a+b}$, $\hat{T}_a\,\hat{x}\,\hat{T}_a^\dagger = \hat{x} - a\mathbb{1}$ und $\hat{T}_a\,\hat{p}\,\hat{T}_a^\dagger = \hat{p}$.

**b)** Die verallgemeinerten Eigenfunktionen von $\hat{T}_a$ können in der Form $\psi(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}u(x)$ dargestellt werden, wobei $u \in L^2(\mathbb{R})$ ist und die Eigenschaft $\hat{T}_a u = u$ besitzt.

**c)** Ist $V(x)$ ein $a$-periodisches Potential, d. h., $V(x) = V(x+a)\ \ \forall\, x$, dann vertauscht der Hamilton-Operator $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V$ mit $\hat{T}_a$.

**17.** Wir betrachten den Paritätsoperator $\hat{P}$ auf $L^2(\mathbb{R})$, definiert durch

$$(\hat{P}\psi)(x) = \psi(-x)\,.$$

**a)** Zeigen Sie, daß $\hat{P}$ unitär und selbstadjungiert ist.

**b)** Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Spektralzerlegung von $\hat{P}$.

**c)** Elemente $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ haben gerade bzw. ungerade Parität, falls $\hat{P}\psi = \psi$ bzw. $\hat{P}\psi = -\psi$ gilt. Ein Operator $\hat{A}$ auf $L^2(\mathbb{R})$ hat gerade bzw. ungerade Parität, falls $\hat{P}\hat{A}\hat{P} = \hat{A}$ bzw. $\hat{P}\hat{A}\hat{P} = -\hat{A}$ gilt. Zeigen Sie die folgenden Auswahlregeln:

– Haben $\psi$ und $\varphi$ unterschiedliche Parität und hat $\hat{A}$ gerade Parität, dann ist $\langle\psi|\hat{A}\varphi\rangle = 0$.

– Haben $\psi$ und $\varphi$ dieselbe Parität und hat $\hat{A}$ ungerade Parität, dann ist $\langle\psi|\hat{A}\varphi\rangle = 0$.

**d)** Welche Parität haben der Orts- und der Impulsoperator?

**18. (Pflicht)** Wir betrachten ein System, das durch zwei orthogonale Zustände $\varphi_1$, $\varphi_2$ beschrieben wird ("Zwei-Niveau-System"). Der Hamilton-Operator ist

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\beta \\ -\beta & \varepsilon \end{pmatrix} .$$

Ein solches System liefert zum Beispiel ein einfaches Modell für den zur Wasserstoff-Ebene transversalen Schwingungsfreiheitsgrad des Stickstoff-Atoms in einem Ammoniak-Molekül $NH_3$, wobei sich das Atom im Zustand $\varphi_1$ auf der einen und im Zustand $\varphi_2$ auf der anderen Seite der Ebene befindet.

**a)** Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\hat{H}$ und geben Sie die Spektralzerlegung an.

**b)** Lösen Sie die zeitabhängige Schrödingergleichung für einen beliebigen Anfangszustand. Geben Sie das Ergebnis als Linearkombination von $\varphi_1$ und $\varphi_2$ an.

**c)** Geben Sie für den Anfangszustand $\varphi_1$ die Wahrscheinlichkeit dafür an, das System zur Zeit $t$ wieder in diesem Zustand anzutreffen.