Universität Leipzig, Institut für Theoretische Physik Prof. Dr. Gerd Rudolph

Übungsaufgaben Quantenmechanik I

Abgabe am 25.11.2013 vor der Vorlesung

13. Wir betrachten die Hermitesche Matrix

$$A = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 13 & -2i & -3 \\ 2i & 10 & 6i \\ -3 & -6i & 5 \end{bmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.

b) Geben Sie die Spektralzerlegung an und berechnen Sie die Norm von A.

14. Zeigen Sie, daß die Heisenbergsche Vertauschungsrelation

$$\hat{x} \cdot \hat{p} - \hat{p} \cdot \hat{x} = \mathrm{i}\,\hbar\,\mathbb{1}$$

nicht mit beschränkten selbstadjungierten Operatoren $\hat{x}$ und $\hat{p}$ auf einem Hilbertraum realisiert werden kann.

Hinweis: Nehmen Sie an, die Relation gelte für beschränkte selbstadjungierte Operatoren $\hat{x}$ und $\hat{p}$ und konstruieren Sie daraus einen Widerspruch. Zeigen Sie dazu, daß

$$\hat{x}^n \cdot \hat{p} - \hat{p} \cdot \hat{x}^n = \mathrm{i}\,\hbar\, n\, \hat{x}^{n-1}$$

gilt und untersuchen Sie die Norm der Operatoren auf beiden Seiten der Gleichung.

15. (Pflicht) Wir betrachten eine Realisierung der Heisenbergschen Vertauschungsrelation

$$\hat{x} \cdot \hat{p} - \hat{p} \cdot \hat{x} = \mathrm{i}\hbar\, \mathbb{1}$$

durch selbstadjungierte Operatoren $\hat{x}$ und $\hat{p}$ auf einem Hilbertraum. Sei $\mathcal{L}$ der komplexe Vektorraum, der durch die Operatoren $\mathbb{1}$, $\hat{x}$, $\hat{p}$, $\hat{x}^2$, $\hat{p}^2$ und $\frac{1}{2}(\hat{x}\cdot\hat{p}+\hat{p}\cdot\hat{x})$ aufgespannt wird.

a) Zeigen sie: Für alle $A, B \in \mathcal{L}$ gilt $\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[A, B] \in \mathcal{L}$.

b) Indem man in den oben angegebenen Ausdrücken für die Basiselemente jeweils $\hat{x}$ und $\hat{p}$ durch die klassischen Variablen x bzw. p ersetzt und dies linear auf $\mathcal{L}$ fortsetzt, erhält man aus jedem $A \in \mathcal{L}$ ein Polynom A^{cl} in den klassischen Variablen. Zeigen Sie, daß für alle $A, B \in \mathcal{L}$

$$\tfrac{\mathrm{i}}{\hbar}[A, B]^{cl} = \left\{A^{cl}, B^{cl}\right\}$$

gilt, wobei

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial p}$$

die klassische Poisson-Klammer von Funktionen f, g der kanonisch konjugierten Variablen x, p bezeichnet.

c)* Zeigen Sie: $\mathcal{L}$ enthält alle Linearkombinationen von Monomen in $\hat{x}$ und $\hat{p}$, deren Ordnung ≤ 2 ist. Kann man die Abbildung $A \mapsto A^{cl}$ dadurch definieren, daß man in einer beliebigen solchen Linearkombination $\hat{x}$ durch x und $\hat{p}$ durch p ersetzt?

Erläuterungen:

1. Die Aufgabe illustriert das Problem der Operatorordnung, das in der Quantentheorie auftritt, wenn man eine Beziehung zwischen klassischen und Quanten-Observablen herstellen möchte. Es wird empfohlen, sich dieses Problem auch an Termen, die höherer als zweiter Ordnung in $\hat{x}$ und $\hat{p}$ sind, zu veranschaulichen, z. B. an $[\hat{x}^3, \hat{p}^3]$.

2. Zur in der Aufgabenstellung vorausgesetzten Realisierung der Heisenbergschen Vertauschungsrelationen gehört ein dichter Unterraum $\mathcal{D}$ des Hilbertraums, der unter $\hat{x}$ und $\hat{p}$ invariant ist und die Eigenschaft besitzt, daß jeder selbstadjungierte Operator auf $\mathcal{H}$, dessen Definitionsbereich $\mathcal{D}$ enthält und dessen Einschränkung auf $\mathcal{D}$ mit der von $\hat{x}$ (bzw. $\hat{p}$) zusammenfällt, mit $\hat{x}$ (bzw. $\hat{p}$) übereinstimmt. Mit den Einschränkungen von $\hat{x}$ und $\hat{p}$ auf $\mathcal{D}$ kann man beliebige Produkte bilden, ohne Information zu verlieren. Alle Rechnungen für die Aufgabe sind genaugenommen mit diesen Einschränkungen auszuführen.