Universität Leipzig, Institut für Theoretische Physik Prof. Dr. Gerd Rudolph

Übungsaufgaben Quantenmechanik I

Abgabe am 18.11.2013 vor der Vorlesung

10. Gegeben sei ein Hilbertraum $\mathcal{H}$.

a) Beweisen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle \psi \mid \phi \rangle|^2 \leq \langle \psi|\psi\rangle \, \langle \phi|\phi\rangle \,, \qquad \psi, \phi \in \mathcal{H} \,.$$

b) Zeigen Sie, daß durch

$$\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi|\psi\rangle}$$

eine Norm auf $\mathcal{H}$ definiert wird.

11. Sei A ein beschränkter linearer Operator auf einem Hilbertraum und bezeichne $A^\dagger$ den zu A adjungierten Operator. Zeigen Sie:

$$\begin{array}{lrcllrcll}
\textbf{a)} & (A^\dagger)^\dagger & = & A \,, & \qquad \textbf{b)} & (\lambda A)^\dagger & = & \lambda^* A^\dagger \,, & \qquad \lambda \in \mathbb{C} \,, \\
\textbf{c)} & (AB)^\dagger & = & B^\dagger A^\dagger \,, & \qquad \textbf{d)} & (A+B)^\dagger & = & A^\dagger + B^\dagger \,, & \\
\textbf{e)} & \|A^\dagger\| & = & \|A\| \,, & \qquad \textbf{f)} & \|A^\dagger A\| & = & \|A\|^2 \,. &
\end{array}$$

12. (Pflicht) Gegeben sei ein Hilbertraum $\mathcal{H}$. Für einen beliebigen abgeschlossenen Unterraum $E \subseteq \mathcal{H}$ bezeichne P_E den Orthoprojektor auf diesen Unterraum. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) P_E ist beschränkt, selbstadjungiert ($P_E^\dagger = P_E$), idempotent ($P_E^2 = P_E$) und positiv $\big(\langle \psi|P_E\psi\rangle \geq 0 \;\; \forall\, \psi \in \mathcal{H}\big)$.

b) Zu jedem beschränkten linearen, selbstadjungierten und idempotenten Operator P auf $\mathcal{H}$ existiert ein abgeschlossener Unterraum $E \subseteq \mathcal{H}$ mit $P = P_E$.

c) Die Relation $P_E \leq P_F \;:\Leftrightarrow\; E \subseteq F$ definiert eine Halbordnung auf der Menge der Orthoprojektoren und es gilt $P_E \leq P_F \;\Leftrightarrow\; P_E P_F = P_E$.

d) $P_E P_F$ ist genau dann ein Orthoprojektor, wenn $P_E P_F = P_F P_E$ gilt. Auf welchen Unterraum projiziert $P_E P_F$ in diesem Falle?