

Übungsaufgaben Quantenmechanik I

Abgabe am 11.11.2013 vor der Vorlesung

7. (Pflicht) Wir betrachten ein freies Teilchen in einer Dimension, dessen Wellenfunktion $\psi(x, t)$ zur Zeit $t = 0$ die folgende Gestalt hat:

$$\psi(x, 0) = N e^{-\frac{x^2}{4d^2} + \frac{i}{\hbar} p_0 x}.$$

- Berechnen Sie die Normierungskonstante N .
- Berechnen Sie die Fouriertransformierte zur Zeit $t = 0$,

$$\tilde{\psi}(p, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} dx \psi(x, 0) e^{-\frac{i}{\hbar} p x}$$

und bestimmen Sie daraus die Fouriertransformierte zur Zeit t . Begründen Sie, daß $\psi(x, t)$ mit der in Aufgabe 6 untersuchten Wellenfunktion übereinstimmt.

- Berechnen Sie die statistischen Mittelwerte $\langle p \rangle$, $\langle p^2 \rangle$ und die mittlere quadratische Schwankung Δp für die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\tilde{\psi}(p, 0)|^2$. Was erhält man für $|\tilde{\psi}(p, t)|^2$?
- Bestimmen Sie $\Delta x \Delta p$ zur Zeit t unter Verwendung des folgenden Resultats aus Aufgabe 6:

$$\Delta x = \sqrt{d^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{4d^2 m^2}}.$$

8. Leiten Sie aus der Heisenbergschen Unschärferelation und der klassischen Formel für die Energie eine untere Schranke für den Radius r und die Energie E des Wasserstoffatoms ab. Nehmen Sie dazu an, daß sich das Elektron auf einer fixierten Kreisbahn um den Kern bewegt. Vergleichen Sie mit der Grundzustandsenergie des Bohrschen Atommodells.

9. Ein Strahl von Silberatomen in einem Stern-Gerlach-Experiment trete aus einem Ofen aus, der Silberdampf mit einer Temperatur von 1200K enthält. Der Strahl werde dadurch kollimiert, daß er eine schmale Kreisblende mit Durchmesser d durchläuft. Zeigen Sie mit Hilfe der Heisenbergschen Unschärferelation, daß es unmöglich ist, durch Verkleinerung der Blendenapertur den Durchmesser D des Trefferbildes auf dem Schirm beliebig klein zu machen. Der Schirm möge sich in einer Entfernung $l = 1\text{m}$ von der Blende befinden. Schätzen Sie den kleinsten Wert von D ab, den man durch Variation von d erreichen kann. Man nehme dabei der Einfachheit halber an, daß alle Atome denselben Impuls in Strahlrichtung haben und bestimme diesen aus dem Energie-Gleichverteilungssatz!

Verwenden Sie $m_{Ag} = 1,8 \times 10^{-25}\text{kg}$, $k_B = 1,38 \times 10^{-23}\text{J/K}$, $\hbar = 1,055 \times 10^{-34}\text{Js}$.