Universität Leipzig, Institut für Theoretische Physik Prof. Dr. Gerd Rudolph

Übungsaufgaben Quantenmechanik I

Abgabe am 04.11.2013 vor der Vorlesung

4. Stationäre Lösungen der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung sind von der Gestalt

$$\psi(\vec{x},t) = \phi(\vec{x})\, e^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Et}\,,$$

wobei $\phi(x)$ eine Lösung der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung zum Energieeigenwert E ist. Zeigen Sie durch explizite Berechnung von ρ und $\vec{j}$, daß solche Lösungen die Kontinuitätsgleichung erfüllen.

5. Zeigen Sie unter Verwendung der Schrödinger-Gleichung, daß bei einem freien Teilchen die mittlere quadratische Schwankung $(\Delta\vec{v})^2$ der Geschwindigkeit eine Bewegungskonstante ist.

6. (Pflicht) Wir betrachten ein eindimensionales Gaußsches Wellenpaket

$$\psi(x,t) = \frac{N}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \mathrm{d}p\; \varphi(p)\; \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(px - \frac{p^2 t}{2m})}\,,$$

mit

$$\varphi(p) = \mathrm{e}^{-\frac{(p-p_0)^2}{\hbar^2}d^2}\,,$$

wobei N die Normierungskonstante ist.

a) Bestimmen Sie N und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi|^2$.

b) Berechnen Sie den statistischen Mittelwert $\langle\hat{x}\rangle$ und die mittlere quadratische Schwankung $(\Delta\hat{x})^2$ des Teilchenortes. Letztere kann man als die räumliche Ausdehnung des Teilchens interpretieren.

c) Bestimmen Sie unter Verwendung dieser Resultate die Flugstrecke, nach der ein freies Proton mit der kinetischen Energie 1 MeV seine anfängliche räumliche Ausdehnung (gegeben durch $\Delta\hat{x}$) von 10^{-3} nm verdoppelt hat.