Aufgaben zur Tangentialabbildung

1. Seien V, W reelle Vektorräume, $M \subset V$, $N \subset W$ offene Teilmengen und sei $\Phi : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung. Zeigen Sie:

a) Für jedes $m \in M$ ist die Abbildung $\mathrm{T}_m M \to V$, $[\gamma] \mapsto \gamma'(0)$ ein Isomorphismus von Vektorräumen. Entsprechendes gilt für $\mathrm{T}_{\Phi(m)} N$.

b) Benutzt man a), um die Tangentialräume mit V bzw. W zu identifizieren, dann wird die Tangentialabbildung Φ'_m mit der gewöhnlichen Ableitung $\Phi'(m)$ der Abbildung Φ identifiziert.

c) Ist Φ linear, dann gilt in obiger Identifizierung $\Phi'_m = \Phi$.

2. Sei $\Phi : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung und seien (U, κ) bzw. (V, ρ) Karten um m bzw. $\Phi(m)$. Zeigen Sie, daß $\rho'_{\Phi(m)} \circ \Phi'_m \circ (\kappa^1)'_{\kappa(m)}$ mit der Matrix der partiellen Ableitungen des lokalen Repräsentanten $\rho \circ \Phi \circ \kappa^{-1}$ übereinstimmt.

3. Beweisen Sie die Kettenregel $(\Psi \circ \Phi)'_m = \Psi'_{\Phi(m)} \circ \Phi'_m$ sowohl im Rahmen der Beschreibung von Tangentialvektoren durch Wege, als auch durch Derivationen.

4. Berechnen Sie die Tangentialabbildungen für die folgenden Abbildungen:

a) $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\Phi(x) := (\cos(x), \sin(x))$

b) $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\Phi(x) := (x^2, x^3)$

c) $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x_1, x_2) := x_1 x_2$

d) (Skalarprodukt) $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = x^T y$

e) (quadratische Form des Skalarprodukts) $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\Phi(x) = x^T x$

f) (Norm des Skalarprodukts) $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\Phi(x) = \sqrt{x^T x}$ (Norm des Skalarprodukts)

g) (Bilinearform) $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = x^T A y$, A eine reelle $n \times n$-Matrix

h) (quadratische Form) $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\Phi(x) = x^T A x$

i) (Matrix-Exponentialabbildung) $\Phi : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $\Phi(A) := \exp(A) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$, wobei $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ den Vektorraum der reellen $n \times n$-Matrizen bezeichnet. Man berechne die Tangentialabbildung nur im Punkt $A = 0$.

j) (Matrixinversion) $\Phi : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $\Phi(A) = A^{-1}$

k) (Automorphismen des Einheitskreises) $\Phi : \mathrm{S}^1 \to \mathrm{S}^1$, $\Phi(\alpha) = \alpha^n$

5. Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, daß die Tangentialabbilding f'_m mit dem Differential $(\mathrm{d}f)_m$ zusammenfällt. (Das Differential $(\mathrm{d}f)_m$ ist der durch $(\mathrm{d}f)_m(X_m) := X_m f$ definierte Kovektor).

6. Berechnen Sie die Tangentialabbildung einer Kurve $\gamma \colon \mathbb{R} \to M$ im Punkt $t \in \mathbb{R}$.