

# Übungsaufgaben Theoretische Elektrodynamik

Abgabe am 16.05.2013 vor der Vorlesung

10. Wir betrachten den zum Feldstärketensor  $f_{\mu\nu}$  dualen Tensor

$$\check{f}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\kappa} f_{\rho\kappa}.$$

a) Drücken Sie  $\check{f}^{\mu\nu}$  durch die Komponenten von  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  aus. Geben Sie eine Ersetzungsregel für  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  an, die  $f_{\mu\nu}$  in  $\check{f}_{\mu\nu}$  überführt.

b) Zeigen Sie, daß die erste Gruppe der Maxwell'schen Gleichungen äquivalent ist zu

$$\partial_\mu \check{f}^{\mu\nu} = 0.$$

*Hinweis:* Es gilt  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\nu}\epsilon^{\nu\mu\kappa\lambda} = \delta_\alpha^\mu\delta_\beta^\kappa\delta_\gamma^\lambda + \delta_\beta^\mu\delta_\gamma^\kappa\delta_\alpha^\lambda + \delta_\gamma^\mu\delta_\alpha^\kappa\delta_\beta^\lambda - \delta_\beta^\mu\delta_\alpha^\kappa\delta_\gamma^\lambda - \delta_\gamma^\mu\delta_\beta^\kappa\delta_\alpha^\lambda - \delta_\alpha^\mu\delta_\gamma^\kappa\delta_\beta^\lambda$ .

11. Lösen Sie die relativistische Bewegungsgleichung für eine Ladung  $q$  mit der Ruhemasse  $m_0$  unter dem Einfluß des statischen homogenen elektromagnetischen Feldes  $\vec{E} = E\vec{e}_3$ ,  $\vec{B} = B\vec{e}_3$ .

*Hinweis:* Zeigen Sie zunächst, daß  $\alpha^2 = p_1^2 + p_2^2$  eine Erhaltungsgröße ist. Drücken Sie zur Berechnung von  $x^1(t)$  und  $x^2(t)$  die Impulskomponenten  $p_1$  und  $p_2$  durch  $\alpha$  und einen Winkel  $\varphi$  aus und bestimmen Sie  $\varphi(t)$  aus den Bewegungsgleichungen. Bestimmen Sie schließlich  $x^1(t)$  und  $x^2(t)$  als Funktionen von  $\varphi$ .

12. Lösen Sie die relativistische Bewegungsgleichung für eine Ladung  $q$  mit der Ruhemasse  $m_0$  unter dem Einfluß des statischen homogenen elektromagnetischen Feldes  $\vec{E} = E\vec{e}_2$  und  $\vec{B} = B\vec{e}_3$  mit  $E = cB$ .

*Hinweis:* Zeigen Sie, daß  $\alpha := W - cp_1$  eine Erhaltungsgröße ist und benutzen Sie dies, um  $p_2(t)$  implizit als Lösung einer kubischen Gleichung zu bestimmen. Drücken Sie dann die gesuchten Lösungen  $x^i(t)$  durch  $p_2(t)$  aus.

13. Wir betrachten den Maxwell'schen Spannungstensor  $T_{kl}$ .

a) Drücken Sie  $T_{kl}$  durch die Felder  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$  und  $\vec{H}$  aus.

b) Stellen Sie eine Bilanz für den Gesamtimpuls einer Ladungsverteilung im elektromagnetischen Feld auf und lesen Sie daraus eine physikalische Interpretation von  $T_{kl}$  ab (analog zu der auf der Vorlesung diskutierten Energiebilanz).

14. Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß'schen Satzes die elektrische Feldstärke innerhalb und außerhalb einer homogen geladenen Vollkugel mit Gesamtladung  $Q$  und Radius  $R$  im Vakuum.