Universität Leipzig, Institut für Theoretische Physik Prof. Dr. Gerd Rudolph

Übungsaufgaben Theoretische Elektrodynamik

Abgabe am 25.04.2013 vor der Vorlesung

4. Zeigen Sie, daß die spezielle Lorentztransformation von einem Inertialsystem K in ein Inertialsystem K', das sich bezüglich K mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt, gegeben ist durch

$$x'^{\,0} = \gamma(x^0 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{x}}{c})\,, \qquad \vec{x}' = \vec{x} + (\gamma - 1)\frac{(\vec{x}\cdot\vec{v})\vec{v}}{v^2} - \gamma\,\frac{\vec{v}}{c}\,x^0\,,$$

wobei

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Hinweis: Eine Möglichkeit besteht darin, $\vec{x}$ und $\vec{x}\,'$ in Anteile parallel zu $\vec{v}$ und Anteile senkrecht zu $\vec{v}$ zu zerlegen und die Umrechnung dieser Anteile aus der Formel für den Fall $\vec{v} = v\vec{e}_1$ zu bestimmen.

5. Zeigen Sie, daß die Hintereinanderausführung einer reinen Drehung R und einer speziellen Lorentztransformation mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ gegeben ist durch

$$\begin{bmatrix} x'^0 \\ \vec{x}' \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \gamma & -\gamma\,\dfrac{\vec{v}^{\,T}}{c} \\ \hline -\gamma R\dfrac{\vec{v}}{c} & R + \dfrac{\gamma-1}{\vec{v}^2}\,(R\vec{v})\vec{v}^{\,T} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{bmatrix}.$$

6. Zeigen Sie, daß die Viererbeschleunigung

$$w^\mu = \frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}s^2}$$

in einem Inertialsystem K die Komponenten

$$w^0 = -\frac{\gamma^4}{c^3}\,v_l\,a^l\,, \qquad w^k = -\frac{\gamma^4}{c^4}\,v^k\,a_l\,v^l + \frac{\gamma^2}{c^2}\,a^k$$

hat. Dabei sind

$$v^k = \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}\,, \qquad a^k = \frac{\mathrm{d}^2 x^k}{\mathrm{d}t^2}$$

die räumlichen Komponenten von Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung in K und s bezeichnet die Eigenzeit.