Mathematik und Kultur in Leipzig

Institut für Theoretische Physik (ITP)

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Physik und Mathematik

Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben.

Dieser berühmte Satz Galileis trifft in besonderem Maße auf die Physik zu, deren Erkenntnisse und Bedürfnisse seit jeher wesentlich zur Weiterentwicklung der Mathematik beigetragen haben – einerseits durch natürliche, schwierige mathematische Problemstellungen und die Entwicklung neuer, mathematisch fruchtbarer Konzepte, andererseits durch überraschende, physikalisch motivierte Einsichten, die oft ganz neue Bezüge zwischen verschiedenen Zweigen der Mathematik herstellen.

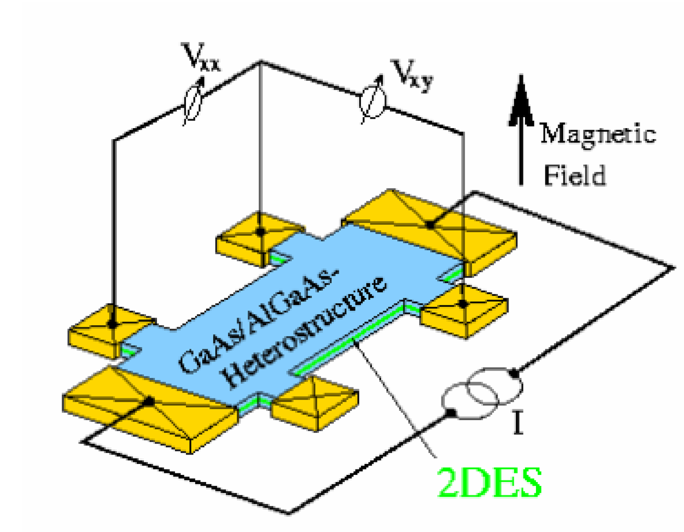
Neue physikalische Theorien entstehen sowohl aus überraschenden experimentellen Resultaten als auch aus dem Versuch, fundamentale Prinzipien, auf denen unser Verständnis der Welt basiert, zu verallgemeinern und zu hinterfragen. Bei der Formulierung solcher Theorien wird oft mathematisches Neuland betreten. Besonders faszinierend ist, dass die Bedeutung dieser Theorien oft weit über das ursprüngliche Phänomen hinausreicht.

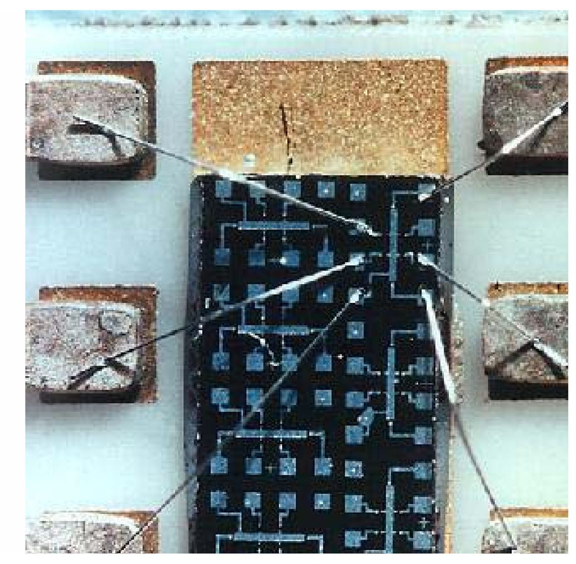
Berühmte Beispiele aus der Vergangenheit sind die Entwicklung des Differentialkalküls im Rahmen der Mechanik (Leibniz und Newton), die Begründung der Geometrie gekrümmter Räume und ihre Anwendung und Erweiterung auf die Gravitationstheorie (Riemann, Hilbert, Lorentz, Einstein), und die Erfindung und Interpretation der Quantenmechanik im Rahmen nichtkommutativer Algebren (Heisenberg, Dirac, von Neumann).

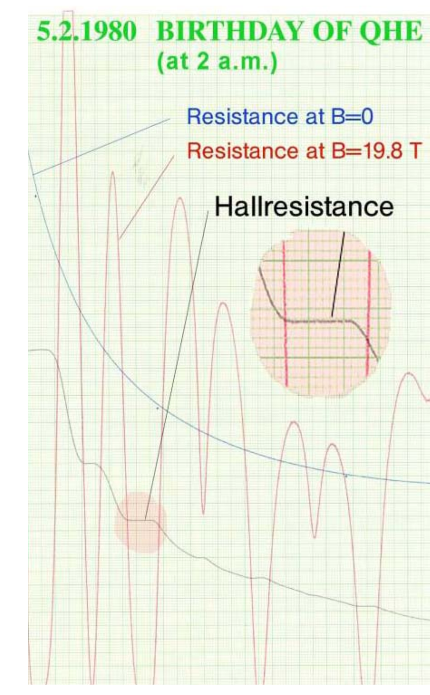
Die letzten Jahrzehnte brachten viele weitere Beispiele dieser Art, von denen im folgenden drei kurz dargestellt werden: die Chern-Simons-Theorie erklärt den Quanten-Halleffekt und erlaubt Knoteninvarianten zu berechnen. Das Studium der Lösungsräume der Yang-Mills-Theorie führte zu neuen Einsichten auf dem Gebiet der Topologie von glatten vierdimensionalen Mannigfaltigkeiten. Die Suche nach einer Quantentheorie von Raum und Zeit führt zu Entwicklungen in der nichtkommutativen Geometrie.

Am Institut für Theoretische Physik der Universität Leipzig untersuchen wir fundamentale Fragestellungen dieser Art, in Zusammenarbeit mit dem mathematischen Institut der Universität Leipzig und mit dem Max-Planck-Institut für Mathematik, Leipzig. Diese Zusammenarbeit folgt einer langen Tradition, die fortgesetzt und intensiviert wird.

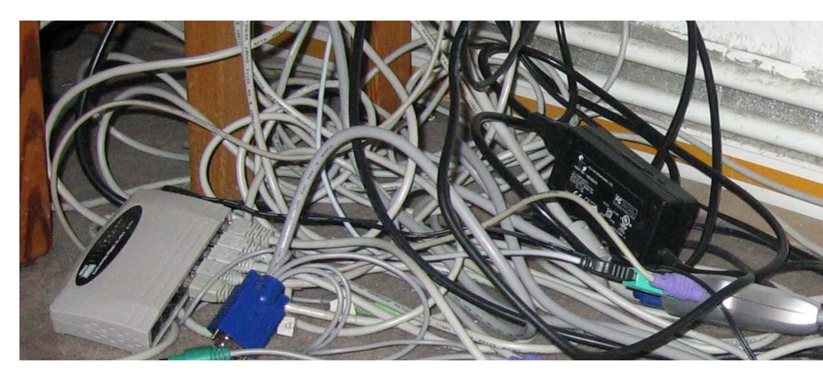
Quanten-Halleffekt und Knotentheorie

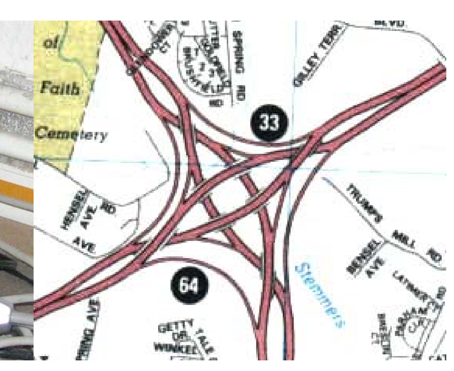






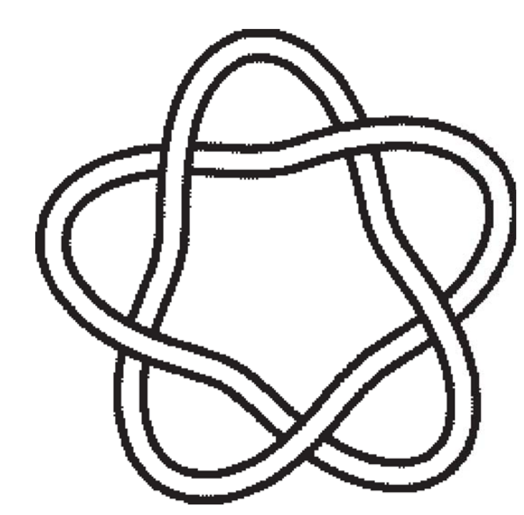
Quanten-Halleffekt, entdeckt von Klaus von Klitzing 1980: Schema, Originalprobe, Originalmesskurve mit den berühmten Plateaus des Hallwiderstands. Die Werte des Widerstands auf diesen Plateaus erlauben Präzisionsmessungen von Naturkonstanten (Nobelpreis 1985).

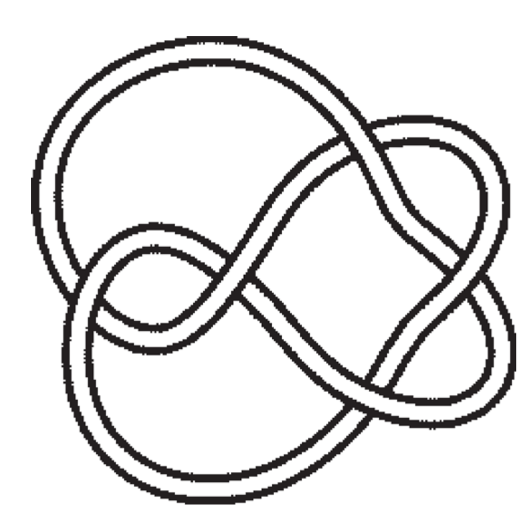




Beispiele von „Knoten" aus dem Alltag

Knoteninvarianten





Rechts: zwei Knoten mit fünf Kreuzungen, genannt 5_1 und 5_2. Die Unterscheidung bzw. Entwirrung kompliziert aussehender Knoten ist i. a. sehr schwierig (gordischer Knoten!) Dazu sind topologische Invarianten nützlich. Das von Vaughan Jones 1983 gefundene Jonespolynom ist eine solche, und man kann damit z. B. diese beiden Knoten unterscheiden: das Jonespolynom von 5_1 ist $t^2 + t^4 - t^5 + t^6 - t^7$, das von 5_2 ist $t - t^2 + 2t^3 - t^4 + t^5 - t^6$.

Chern-Simons-Quantenfeldtheorie

Edward Witten fand 1989 eine intrinsisch dreidimensionale Methode zur Berechnung des Jonespolynoms mit Hilfe der Quantenfeldtheorie. Dieselbe Quantenfeldtheorie erklärt auch die universellen Werte des Widerstands, die auf den Quanten-Hallplateaus gemessen werden.