

Übungsaufgaben Theoretische Mechanik

Abgabe am 19.10.2012, 13:30 Uhr (vor der Vorlesung)

1. a) Zeigen Sie, daß affine Transformationen

$$x'^{\mu} = a^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + b^{\mu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

wobei a^{μ}_{ν} eine nichtsinguläre 4×4 -Matrix und $b^{\mu} = (b^0, b^k)$ ein Vierervektor ist, Geraden in Geraden überführen.

b) Finden Sie eine affine Transformation, die den Einheitsvektor in x^1 -Richtung eines kartesischen Koordinatensystems mit den Koordinaten x^{μ} in den Einheitsvektor in x^0 -Richtung transformiert und die den Koordinatenursprung nicht verschiebt. Interpretieren Sie diese Transformation geometrisch!

2. a) Weisen Sie nach, daß die Menge der Galilei-Transformationen, versehen mit der Operation der Nacheinanderausführung, eine Gruppe bildet.

b) Bezeichne $G(a, \vec{v}, \vec{b}, b^0)$ die Galileitransformation

$$G(a, \vec{v}, \vec{b}, b^0)(t, \vec{x}) = (t + b^0, a\vec{x} + \vec{v}t + \vec{b}),$$

wobei a eine orthogonale (3×3)-Matrix ist. Zeigen Sie, daß für die Nacheinanderausführung zweier Galileitransformationen gilt

$$G(a_2, \vec{v}_2, \vec{b}_2, b_2^0) \circ G(a_1, \vec{v}_1, \vec{b}_1, b_1^0) = G(a_2 \cdot a_1, a_2 \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_2, a_2 \cdot \vec{b}_1 + \vec{v}_2 \cdot b_1^0 + \vec{b}_2, b_1^0 + b_2^0).$$

3. Wir betrachten kartesische Koordinatensysteme K und K' auf dem dreidimensionalen Euklidischen Raum E^3 .

a) Sei P ein Punkt in E^3 . Wie werden die Koordinaten (x, y, z) von P im System K in die Koordinaten (x', y', z') von P im System K' für die folgende Fälle umgerechnet?

a-1) Der Ursprung von K' ist relativ zu dem von K um den Vektor \vec{a} verschoben. Die Achsen verlaufen parallel.

a-2) Bei gleichem Ursprung ist K' relativ zu K um einen Winkel φ um die z -Achse gedreht.

a-3) K' bewegt sich geradlinig gleichförmig bezüglich K mit der Geschwindigkeit \vec{v} . Die Achsen bleiben dabei parallel. Zum Zeitpunkt t_0 fallen K und K' zusammen.

a-4) K' ist mit einem Körper verbunden, der sich im freien Fall im als homogen angenommenen Schwerfeld der Erde befindet, während K mit der Erde fest verbunden ist. Die Achsen bleiben parallel ausgerichtet.

a-5) Bei gleichem Ursprung dreht sich K' relativ zu K um die x -Achse, wobei der Drehwinkel $\varphi(t)$ zeitlich veränderlich ist.

Welche dieser Koordinatentransformationen sind Galilei-Transformationen?

b) Seien $P_1 = P_1(t)$ und $P_2 = P_2(t)$ Bahnkurven (z. B. von bewegten Körpern). Bei welchen Transformationen aus a) bleiben folgende Größen invariant?

b-1) z -Koordinate von P_1 ,

b-2) Koordinaten des Abstandsvektors zwischen P_1 und P_2 ,

b-3) Betrag des Abstandes,

b-4) Skalarprodukt der Ortsvektoren (d. h. der Vektoren der Koordinaten) von P_1 und P_2 ,

b-5) die Komponenten der Geschwindigkeit von P_1 ,

b-6) die Komponenten der Beschleunigung von P_1 .