Universität Leipzig
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. K. Kroy

WS 2015/16

Theoretische Physik III
Thermodynamik und statistische Mechanik

---

13. Übungsblatt

Aufgabe 30: *Kanonische Zustandsummen für (wenige) Fermi- und Bose-Teilchen* **(4 Punkte)**

a) Betrachten Sie ein System von zwei identischen Teilchen mit dem gleichen Eigendrehimpuls (z. B. Spin $+1/2$), deren jedes die Energie 0, $\mathcal{E}$ und $2\mathcal{E}$ besitzen kann. Der niedrigste Energiezustand sei zweifach entartet. Zählen Sie sorgfältig die Konfigurationen ab und berechnen Sie die kanonische Zustandssumme und die mittlere Energie für

i) Fermi-Teilchen, (1P)

ii) Bose-Teilchen und (1P)

iii) klassische ununterscheidbare Teilchen. (1P)

b) Welche Voraussetzungen sind allgemein wünschenswert, damit Fermi- bzw. Bose-Teilchen als klassisch angesehen werden können? (1P)

Aufgabe 31: *Mean-Field-Lösung des zweidimensionalen Ising-Modells* **(5 Punkte)**

Die Hamiltonfunktion des Ising-Modells auf einem beliebigen regulären Gitter ist

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j \, ,$$

wobei $s_i = \pm 1$ und $J > 0$ (ferromagnetische Kopplung). Die Summe läuft dabei über alle q Paare von Spins, die nächste Nachbarn auf dem Gitter sind. Die Magnetisierung sei definiert als $M = \langle s \rangle$.

a) Geben Sie die Energie des $i$ten Spins in Molekularfeld-Näherung an und berechnen Sie in dieser Näherung die Zustandssumme. (2P)

b) Zeigen Sie, dass in der Mean-Field-Näherung die Selbstkonsistenzgleichung

$$M_s = \frac{k_\mathrm{B} T}{qJ} \operatorname{arctanh}(M_s)$$

gilt. Analysieren Sie mit Hilfe dieser Beziehung das kritische Verhalten des Magneten. Bestimmen Sie die kritische Temperatur für ein Quadratgitter und vergleichen Sie diese mit dem exakten Ergebnis von Onsager ($T_c \approx 2.27\,$J/k$_\mathrm{B}$). (3P)

Hinweis: Für $T \approx T_c$ kann $M_s \ll 1$ angenommen werden.

Aufgabe 32*: *Phasengrenzflächen* **(6 Zusatzpunkte)**

a) Berechnen Sie das Ordnungsparameterprofil an einer ebenen Phasengrenze (in der Nähe des kritischen Punktes, also $t = (T - T_\mathrm{c})/T_\mathrm{c} \to 0^{(-)}$) mithilfe der Minimierung des Landau-Ginzburg Funktionals,

$$L = n_\mathrm{c} k_\mathrm{B} T_\mathrm{c} \int_V \mathrm{d}\boldsymbol{r}\, \mathcal{L}_\mathrm{G}\,, \qquad \text{wobei} \qquad \mathcal{L}_\mathrm{G} = \frac{\ell^2}{2}(\nabla\psi)^2 + \frac{t}{2}\psi^2 + \frac{g}{4}\psi^4\,.$$

Verwenden Sie dabei die Randbedingungen $\psi(z \to \pm\infty) = \pm\sqrt{-t/g}$. (3ZP)

Hinweis: Das gesuchte Profil minimiert das Landau-Ginzburg Funktional und errechnet sich aus der Euler-Lagrange Gleichung,

$$\frac{\delta L}{\delta \psi} = \nabla \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \nabla\psi} - \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \psi} = 0\,.$$

Werten Sie obige Gleichung für $\psi = \psi(z)$ aus und integrieren Sie diese, um auf eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zu kommen.

b) Diskutieren Sie das Ergebnis

$$\psi(z) = \psi_1 \tanh(z/\xi)$$

aus Teilaufgabe a), insbesondere die Form und Rolle der Parameter ψ_1 und ξ. (1ZP)

c) Berechnen Sie die Grenzflächenspannung, indem Sie den aus $\mathcal{L}_\mathrm{G}$ für die in a) gefundene Lösung resultierenden Grenzflächenbeitrag zur freien Energie L durch die Grenzfläche aufintegrieren. Diskutieren Sie Ihr Ergebnis. (2ZP)

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\mathcal{L}(\psi) - \mathcal{L}(\psi_1) = \ell^2(\partial_z\psi)^2/2$ gilt, wobei die Landau-Funktion $\mathcal{L}$ durch $\mathcal{L}_\mathrm{G} = \mathcal{L} + \ell^2(\partial_z\psi)^2/2$ definiert ist.

gesamt: 9 + 6 Punkte

Abgabe: **Do. 27.01.**, vor der Vorlesung
Die mit * gekennzeichneten Aufgaben sind Zusatzaufgaben und gehen nicht in die reguläre Wertung ein.