

Theoretische Physik III
Thermodynamik und statistische Mechanik

---

12. Übungsblatt

Aufgabe 27: *Ideales Gas großkanonisch* **(4 Punkte)**

Der Hamiltonian eines idealen Gases mit Volumen V in einem externen Potential $U(\boldsymbol{r})$ ist gegeben durch

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m} + U(\boldsymbol{r}_i) \right) .$$

a) Zeigen Sie, dass die großkanonische Zustandssumme in die Form

$$Z_{\mathrm{G}}(V,T,z) = \mathrm{e}^{zq(V,T)}$$

gebracht werden kann, wobei

$$q(V,T) = \frac{(2\pi m/\beta)^{3/2}}{h^3} \int_V \mathrm{d}\boldsymbol{r}\ \mathrm{e}^{-\beta U(\boldsymbol{r})}$$

ist. Bestimmen Sie die thermische Zustandsgleichung $p = p(T, V, \langle N \rangle)$. (2P)

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die kanonische Zustandssumme und leiten Sie aus dieser die großkanonische Zustandssumme her.

b) Zeigen Sie, dass die Varianz der Teilchenzahl (mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert) in folgender Form ausgedrückt werden kann,

$$\sigma_N^2 = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = z\frac{\partial}{\partial z} z \frac{\partial}{\partial z} \ln \left(Z_G(V,T,z) \right) ,$$

und bestimmen Sie, wie die relative Fluktuationsbreite $\sigma_N / \langle N \rangle$ von der mittleren Teilchenzahl $\langle N \rangle$ abhängt. (2P)

Aufgabe 28: *Eindimensionales Ising-Modell* **(5 Punkte)**

Der Hamiltonian des eindimensionalen Ising-Modells für N Spins ($s_i = \pm 1$, $i = 1, \ldots, N$) mit freien Randbedingungen lautet

$$H(\{s\}) = -\sum_{i=1}^{N-1} J_i s_i s_{i+1} ,$$

wobei J_i die Wechselwirkung zwischen benachbarten Spins i und $i+1$ beschreibt.

a) Berechnen Sie die Zustandssumme Z_N,

$$Z_N = \sum_{\{s\}} \mathrm{e}^{-\beta H(\{s\})} = \sum_{s_1} \cdots \sum_{s_N} \mathrm{e}^{-\beta H(\{s\})} \,,$$

indem Sie eine Rekursionsrelation zwischen Z_N und Z_{N+1} herleiten. Geben Sie Z_N für den üblichen Spezialfall $J_i \equiv J \; \forall i$ an. (2P)

b) Berechnen Sie die Spinkorrelationsfunktion $\langle s_i s_{i+j} \rangle$ und spezialisieren Sie das Ergebnis wieder auf $J_i \equiv J \; \forall i$. (2P)

c) Zeigen Sie, dass die spontane Magnetisierung $M_s = \langle s \rangle$ (für homogene Wechselwirkungen, $J_i \equiv J \; \forall i$) für das unendlich große System nur zwei Werte annehmen kann,

$$M_s(T) = \begin{cases} 0, & T > 0 \\ 1, & T = 0 \end{cases} .$$

Nutzen Sie aus, dass $\langle s_i s_{i+j} \rangle \to \langle s \rangle^2$, für $j \to \infty$, ist. (1P)

Aufgabe 29*: *Benfordsches Gesetz* **(2 Zusatzpunkte)**

Um Steuersündern auf die Schliche zu kommen, greifen Finanzbehörden gelegentlich auf die Beobachtung zurück, dass die signifikanten Ziffern vieler empirisch erhobener Datenreihen nicht gleichverteilt auf $\{1, \ldots, 9\}$ sind, sondern einem anderen universellen Gesetz folgen. Leiten Sie die Form dieses Gesetzes unter der Annahme her, dass es seine Gültigkeit bei Verwendung anderer Maßeinheiten behält.

Hinweis: Stellen Sie die Zahlen in der Form $m \times 10^n$ mit $m \in [1/10, 1)$ dar und betrachten Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von m.

gesamt: 9 + 2 Punkte

Abgabe: **Mi. 20.01.**, vor der Vorlesung
Die mit * gekennzeichneten Aufgaben sind Zusatzaufgaben und gehen nicht in die reguläre Wertung ein.