

## Theoretische Physik III

### Thermodynamik und statistische Mechanik

---

#### 11. Übungsblatt

**Aufgabe 24:** *Liouville-Gleichung*

(3 Punkte)

Leiten Sie die Liouville-Gleichung ab, indem Sie die Phasenraumdichte

$$\rho(\{\mathbf{q}_i\}, \{\mathbf{p}_i\}, t) = \prod_{i=1}^N \delta(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_i(t)) \delta(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_i(t))$$

eines Hamiltonschen  $N$ -Teilchensystems nach der Zeit differenzieren. Formulieren Sie diese als Kontinuitätsgleichung für die Phasenraumdichte.

**Aufgabe 25:** *Kanonisches Zwei-Zustands-System*

(3 Punkte)

Betrachten Sie ein diskretes System mit nur zwei Zuständen, den einem mit Energie  $E_1$  und den anderen mit Energie  $E_2 > E_1$ . Das System sei schwach an ein Wärmebad der Temperatur  $T$  gekoppelt.

- Berechnen Sie die Zustandssumme und die mittlere Energie des Systems. (1P)
- Geben Sie das Verhältnis  $\rho_2/\rho_1$  der Gleichgewichtswahrscheinlichkeiten an, das System in den Zuständen zu finden. Geben Sie auch die Grenzfälle  $T \rightarrow \infty$  und  $T \rightarrow 0$  an. (1P)
- Betrachten Sie nun  $N$  unabhängige solche Systeme als Gesamtsystem, und berechnen Sie die Größen aus Teilaufgabe a) für diesen Fall. (1P)

**Aufgabe 26:** *Maximierung der Gibbs-Entropie*

(5 Punkte)

Die Gibbs-Entropie ist gegeben durch

$$S = -k_B \sum_i \rho_i \ln(\rho_i)$$

wobei die Summe über alle Mikrozustände  $i$  läuft und  $\rho_i$  deren Wahrscheinlichkeitsverteilung ist. Folgende Nebenbedingungen sollen gelten: (1)  $\sum_i \rho_i = 1$  (Normierung) und (2)  $\sum_i E_i \rho_i = \langle E \rangle = U$  (mittlere Energie).

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $\rho_i$ , indem Sie die Entropie unter den obigen Nebenbedingungen maximieren. (2P)

*Hinweis:* Verwenden Sie Lagrange-Multiplikatoren zur Berücksichtigung der Nebenbedingungen.

- b) Bestimmen Sie die Lagrange-Parameter aus den Nebenbedingungen und zeigen Sie, dass  $\rho_i$  die Wahrscheinlichkeitsverteilung des kanonischen Ensembles ist. (2P)
- c) Formulieren Sie das obige Extremalprinzip mit Hilfe der freien Energie  $F$ . (1P)

Abgabe: **Mi. 13.01.**, vor der Vorlesung  
Die mit \* gekennzeichneten Aufgaben sind Zusatzaufgaben und gehen nicht in die reguläre Wertung ein.

**gesamt: 11 Punkte**