Theoretische Physik III
Thermodynamik und statistische Mechanik

---

8. Übungsblatt

Aufgabe 17: *Maxwell-Boltzmann-Verteilung* **(4 Punkte)**

Die Geschwindigkeitsverteilung für ein freies Teilchen der Masse m ist durch die Maxwell-Boltzmann-Verteilung

$$p(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{(2\pi k_B T/m)^{3/2}} \exp\left(- \frac{m|\boldsymbol{v}|^2}{2k_\mathrm{B}T}\right)$$

gegeben, wobei $\boldsymbol{v}$ der Geschwindigkeitsvektor in drei Dimensionen ist.

a) Die Energie eines freien Teilchens ist $\mathcal{E} = m|\boldsymbol{v}|^2/2$. Schreiben Sie die Geschwindigkeitsverteilung $p(\boldsymbol{v})$ in die Energieverteilung $W(\mathcal{E})$ um. Wie verhält sich die Zustandsdichte in Abhängigkeit von $\mathcal{E}$? (2P)

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Energieverteilung $W(\mathcal{E})$ den Erwartungswert der Einteilchenenergie $\langle \mathcal{E} \rangle$ und die Varianz $\sigma_\mathcal{E}^2 = \langle \mathcal{E}^2 \rangle - \langle \mathcal{E} \rangle^2$. (2P)

Aufgabe 18: *Stirling-Formel* **(6 Punkte)**

a) Betrachten Sie die Funktion

$$f(a) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-at} \equiv \frac{1}{a}\,, \qquad a \in \mathbb{R}\,,$$

und deren Ableitungen. Leiten Sie daraus die folgende Gleichung her: (1P)

$$n! = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-t} t^n\,.$$

Bemerkung: Die zu verwendende Methode ist bekannt als „Differenzieren unter dem Integral“ oder auch „Feynmanscher Integrationstrick“.

b) Auf der rechten Seite der obigen Gleichung für $n!$ muss n nicht notwendigerweise eine ganze Zahl sein. Die verallgemeinerte Funktion

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\ \mathrm{e}^{-t}\, t^{z-1}$$

nennt sich Gamma-Funktion. Verwenden Sie diese Definition um die Identitäten $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ und $\Gamma(1) = 1$ zu überprüfen. (1P)

c) Beweisen Sie die Abschätzung $n! \sim \sqrt{n}\mathrm{e}^{1-n}n^n$. (2P)

Hinweis: Schreiben Sie $\ln(n!)$ als Summe und verwenden Sie die Trapezregel, um die Summe durch ein Integral abzuschätzen.

d) Für Funktionen $f(t)$ mit einem globalen Maximum bei $t = t_{\max} \in (a, b)$ bietet sich folgende Näherung („Sattelpunktsnäherung“ oder auch „Laplace-Methode“) an,

$$\int_a^b \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{Mf(t)} \approx \sqrt{\frac{2\pi}{M|f''(t_{\max})|}}\, \mathrm{e}^{Mf(t_{\max})}\,, \qquad M \gg 1\,.$$

Diese kann durch explizite Integration überprüft werden. Wenden Sie die Sattelpunktsnäherung auf $\Gamma(n+1)$ an, um eine Abschätzung für $n!$ zu erhalten. (2P)

gesamt: 10 Punkte

Abgabe: **Mi. 9.12.**, vor der Vorlesung
Die mit * gekennzeichneten Aufgaben sind Zusatzaufgaben und gehen nicht in die reguläre Wertung ein.