Prof. Dr. R. Verch
Dr. P. Marecki

UNIVERSITÄT LEIPZIG

**Inst. f. Theoretische Physik**

Sommersemester 2006

---

# Übungen zur Quantenmechanik II
# Aufgabenblatt 9

---

**Aufgabe 25** *(Cirelsonsche Ungleichung)* [7 Punkte]
Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $A_1, A_2, B_1, B_2$ seien beschränkte symmetrische lineare Operatoren auf $\mathcal{H}$, deren Norm durch 1 beschränkt ist (d.h. es gilt $X = X^*$ und $||X|| \leq 1$ für $X = A_1, A_2, B_1, B_2$). Ausserdem gelte $[A_i, B_j] = 0$ (d.h. die "A"-Operatoren kommutieren mit den "B"-Operatoren). Zeigen Sie, dass dann für jede Dichtematrix $\rho$ auf $\mathcal{H}$ gilt:

$$\mathrm{Tr}(\rho(A_1(B_1 + B_2) + A_2(B_1 - B_2))) \leq 2\sqrt{2}\,.$$

*Hinweis:* Eine Dichtematrix $\rho$ ist ein positiver Spurklasseoperator mit $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$. Bilden Sie zunächst die Operatoren

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}(A_1 + iA_2) \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = \frac{1}{2\sqrt{2}}((B_1 + B_2) + i(B_1 - B_2))\,.$$

Zeigen Sie, dass dann $\mathcal{A}^*\mathcal{A} + \mathcal{A}\mathcal{A}^* \leq \mathbf{1}$ und $\mathcal{B}^*\mathcal{B} + \mathcal{B}\mathcal{B}^* \leq \mathbf{1}$ folgt. Benutzen Sie dies, um

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\sqrt{2}}(A_1(B_1 + B_2) + A_2(B_1 - B_2)) = \mathcal{A}^*\mathcal{B} + \mathcal{A}\mathcal{B}^* \\
&\leq \ \mathbf{1} - \frac{1}{2}\left((\mathcal{A} - \mathcal{B})^*(\mathcal{A} - \mathcal{B}) + (\mathcal{A} - \mathcal{B})(\mathcal{A} - \mathcal{B})^*\right) \leq \mathbf{1}
\end{aligned}$$

zu zeigen.

**Aufgabe 26** *(Maximale Verletzung der Bell-Ungleichungen)* [5 Punkte]
Es sei, in der Notation von Aufgabe 25, $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, und die $A_i$ und $B_j$ seien von der Gestalt

$$A_i = a_i \otimes \mathbf{1} \quad \text{und} \quad B_j = \mathbf{1} \otimes b_j$$

jeweils mit hermiteschen $2 \times 2$ Matrizen $a_i$ und $b_j$, deren Norm durch 1 beschränkt ist. Bestimmen Sie solche $2 \times 2$ Matrizen $a_i$ und $b_j$ mit der Eigenschaft, dass

$$(\Psi, (A_1(B_1 + B_2) + A_2(B_1 - B_2))\Psi) = 2\sqrt{2}\,,$$

für $\Psi = \chi^{\wedge}_{+-}$. Lassen sich solche $a_i$ und $b_j$ mit dieser Eigenschaft auch für die Fälle $\Psi = \chi^{\vee}_{+-}, \chi^{\vee}_{++}, \chi^{\vee}_{--}$ finden?

/...2

**Aufgabe 27** *(Bell-Ungleichung für klassisch korrelierte Zustände)* [3 Punkte]

Es sei $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathrm{A}} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{B}}$ das Hilbertraum-Tensorprodukt zweier Hilberträume $\mathcal{H}_{\mathrm{A}}$ und $\mathcal{H}_{\mathrm{B}}$ und $\rho = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \rho_{\mathrm{A},k} \otimes \rho_{\mathrm{B},k}$ mit $1 \geq \lambda_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{N} \lambda_k = 1$ sei eine konvexe Summe von Tensorprodukten von Dichtematrizen $\rho_{\mathrm{A},k}$ und $\rho_{\mathrm{B},k}$ jeweils auf den Hilberträumen $\mathcal{H}_{\mathrm{A}}$ und $\mathcal{H}_{\mathrm{B}}$. Zeigen Sie, dass dann für alle symmetrischen Operatoren $A_i$ und $B_j$, deren Norm durch 1 beschränkt ist und die von der Form

$$A_i = a_i \otimes \mathbf{1} \quad \text{und} \quad B_j = \mathbf{1} \otimes b_j$$

mit beschränkten Operatoren $a_i$ auf $\mathcal{H}_{\mathrm{A}}$ und beschränkten Operatoren $b_j$ auf $\mathcal{H}_{\mathrm{B}}$ sind, die Ungleichung

$$\mathrm{Tr}(\rho(A_1(B_1 + B_2) + A_2(B_1 - B_2))) \leq 2$$

erfüllt ist.

Abgabe: Am Montag, d. 19.06.2006, in der VL.

**Klausurtermin: Mittwoch, 12.07.06, 16.00-19.00, Theorie-HS**

*Bitte helfen Sie den Korrektoren, indem Sie Ihre Abgaben* **zusammenheften!** *Ab jetzt wird es bei nicht zusammengehefteten Abgaben* **Punktabzug** *geben.*