Prof. Dr. R. Verch
Dr. P. Marecki

UNIVERSITÄT LEIPZIG

**Inst. f. Theoretische Physik**

Sommersemester 2006

---

# Übungen zur Quantenmechanik II
# Aufgabenblatt 7

---

**Aufgabe 19 + 20** Es sei $\mathcal{H}$ ein 1-Teilchen-Hilbertraum ; $H$ sei der 1-Teilchen-Hamiltonoperator mit einer ONB $\{\phi_k\}_{k=1,\dots,\dim(\mathcal{H})}$ aus Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\epsilon(k)$. Ferner seien $a^+(\chi)$ und $a(\chi)$ die bosonischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren in $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ und $b^+(\chi)$ und $b(\chi)$ die fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren in $\mathcal{F}_-(\mathcal{H})$ für $\chi \in \mathcal{H}$. Weisen Sie die folgenden Relationen nach.

(a) $(a(\chi)\psi, \psi')_{\mathcal{F}_+(\mathcal{H})} = (\psi, a^+(\chi)\psi')_{\mathcal{F}_+(\mathcal{H})}$ für alle $\psi^{(\prime)} = \{\psi_N^{(\prime)}\}_{N\in\mathbb{N}_0} \in \mathcal{F}_+(\mathcal{H})$, bei denen nur endlich viele der $\psi_N^{(\prime)}$ von 0 verschieden sind.

(b) $[a(\chi), a(\eta)] = 0 = [a^+(\chi), a^+(\eta)]$, $[a(\chi), a^+(\eta)] = (\chi, \eta)_{\mathcal{H}} \cdot \mathbf{1}$ für alle $\chi, \eta \in \mathcal{H}$, mit dem Kommutator $[X, Y] = XY - YX$

(c) $\{b(\chi), b^+(\eta)\} = 0 = \{b^+(\chi), b^+(\eta)\}$, $\{b(\chi), b^+(\eta)\} = (\chi, \eta)_{\mathcal{H}} \cdot \mathbf{1}$ für alle $\chi, \eta \in \mathcal{H}$, mit dem Anti-Kommutator $\{X, Y\} = XY + YX$.

(d) $(b(\chi))^* = b^+(\chi)$

(e) $b(\chi)$ und $b^*(\chi)$ sind beschränkt

(f) Für den Teilchenzahloperator $\underline{\underline{\mathcal{N}}} = q_\pm(\mathbf{1}_{\mathcal{H}})$ gilt:

$$\underline{\underline{\mathcal{N}}} = \sum_k a^+(\phi_k)a(\phi_k) \quad \text{(Bosonen)}, \qquad \underline{\underline{\mathcal{N}}} = \sum_k b^+(\phi_k)b(\phi_k) \quad \text{(Fermionen)}$$

(g) Für die 2. Quantisierung des Hamiltonoperators $\underline{\underline{H}} = q_\pm(H)$ gilt:

$$\underline{\underline{H}} = \sum_k \epsilon(k)a^+(\phi_k)a(\phi_k) \quad \text{(Bosonen)}, \qquad \underline{\underline{H}} = \sum_k \epsilon(k)b^+(\phi_k)b(\phi_k) \quad \text{(Fermionen)}$$

(h) $q_+(|\phi_k\rangle\langle\phi_k|) = a^+(\phi_k)a(\phi_k)\,, \quad q_-(|\phi_k\rangle\langle\phi_k|) = b^+(\phi_k)b(\phi_k)$

(i) Bestimmen Sie die Kommutatorrelationen zwischen $X$ und den bosonischen bzw. fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für $\phi_j$, jeweils für $X = \underline{\underline{\mathcal{N}}}$, $X = \underline{\underline{H}}$ und $X = q_\pm(|\phi_k\rangle\langle\phi_k|)$.

/...2

**Aufgabe 21** Für einen Dichtematrix-Operator $\rho$ auf einem Hilbertraum $\underset{=}{\mathcal{H}}$ wird die *Entropie* definiert durch

$$S(\rho) = -k_{\mathrm{B}} \mathrm{Tr}(\rho \ln(\rho)) \, .$$

($k_{\mathrm{B}}$ ist die Boltzmannkonstante.)
Nehmen Sie an, dass $\underset{=}{\mathcal{H}} = \mathcal{F}_{\pm}(\mathcal{H})$ mit einem 1-Teilchen-Hilbertraum $\mathcal{H}$, der aufgespannt wird durch die orthonormierten Eigenvektoren $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eines 1-Teilchen-Hamiltonoperators $H$, wobei $H\phi_k = k\epsilon_0\phi_k$ gilt mit einem $\epsilon_0 > 0$. Wie verhält sich die Entropie von

$$\rho_\beta = (Z_{\beta,\underset{=}{H}})^{-1} \mathrm{e}^{-\beta \underset{=}{H}} \quad , \quad \underset{=}{H} = q_{\pm}(H) \, ,$$

bei Variation von $\beta > 0$? Was kann über die Grenzfälle $\beta \to 0$, $\beta \to \infty$ ausgesagt werden?

Wert von Aufgabe 19 + 20 = 10 Punkte, Aufgabe 21 = 5 Punkte.

Abgabe: Am Montag, d. 29.05.2006, in der VL.

**Klausurtermin: Mittwoch, 12.07.06, 16.00-19.00, Theorie-HS**

*Bitte helfen Sie den Korrektoren, indem Sie Ihre Abgaben* **zusammenheften!**. *Ab jetzt wird es bei nicht zusammengehefteten Abgaben* **Punktabzug** *geben.*