Prof. Dr. R. Verch
Dr. P. Marecki

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik
Sommersemester 2006

Übungen zur Quantenmechanik II
Aufgabenblatt 6

Aufgabe 16 Betrachten Sie die Besetzungszahldarstellung von symmetrisierten $(+)$ bzw. antisymmetrisierten $(-)$ N-fachen Tensorproduktvektoren einer orthonormierten Basis $\{\phi_\mu\}_{\mu=1,\ldots,M}$ eines Einteilchen-Hilbertraums $\mathcal{H}$,

$$|N_+;\nu_1,\nu_2,\ldots\rangle = \mathcal{N}_{N_+,\underline{\mu}}\,\phi_{\mu_1}\vee\cdots\vee\phi_{\mu_N}\,,\qquad |N_-;\nu_1,\nu_2,\ldots\rangle = \mathcal{N}_{N_-,\underline{\mu}}\,\phi_{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\phi_{\mu_N}\,.$$

Bestimmen Sie die Normierungsfaktoren $\mathcal{N}_{N_\pm,\underline{\mu}}$ so, dass die Vektoren $|N_\pm;\nu_1,\nu_2,\ldots\rangle$ auf 1 normiert sind. Zeigen Sie, dass die Vektoren $|N_\pm;\nu_1,\nu_2,\ldots\rangle$ eine Orthonormalbasis von $P_\pm(\bigotimes^N\mathcal{H})$ bilden, wenn die ν_k alle für den bosonischen bzw. fermionischen Fall möglichen Werte durchlaufen.

Aufgabe 17 Es sei ein "1-Teilchensystem" gegeben mit Hilbertraum $\mathcal{H}=\mathbb{C}$ und Hamiltonoperator $H_1:\lambda\mapsto h\lambda$ $(\lambda\in\mathbb{C})$ mit einem $h\in\mathbb{R}$. Für $\lambda\in\mathcal{H}$ seien $a^+(\lambda)$ und $a(\lambda)$ die entsprechenden Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren im Bose-Fockraum $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$.

Zeigen Sie, dass es — bei geeigneter Wahl von λ — einen unitären Operator $U:L^2(\mathbb{R})\to\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ gibt, so dass

$$UA^+U^{-1}=a^+(\lambda)\quad\text{und}\quad UAU^{-1}=a(\lambda)\quad\text{gilt,}$$

wobei A^+ und A die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren des 1-dimensionalen harmonischen Oszillators sind (s. nächste Aufgabe), d.h.

$$A=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}X+\frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}P\,,\quad A^+=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}X-\frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}P\,.$$

Drücken Sie außerdem den Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators mit Hilfe von U, U^{-1} und der 2. Quantisierung von H_1 aus (für einen geeigneten Wert von h).

/...2

Aufgabe 18 Der Hamiltonoperator des 1-dimensionalen harmonischen Oszillators ist

$$H = \frac{1}{2m} P^2 + \frac{m\omega^2}{2} X^2 \,.$$

Die Zustandssumme zur inversen Temperatur $\beta > 0$ für den Hamiltonoperator ist

$$Z_{\beta,H} = \mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{-\beta H}) \,,$$

der zugehörige Gibbs-Zustand wird definiert durch

$$\langle B \rangle_{\beta,H} := \frac{1}{Z_{\beta,H}} \mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{-\beta H} B) \,, \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \,.$$

Berechnen Sie die Zustandssumme $Z_{\beta,H}$, den Erwartungswert der Energie $\langle H \rangle_{\beta,H}$ sowie die Varianz der Energie $\Delta_\beta H$ im Gibbs-Zustand als Funktionen in Abhängigkeit von ω,m,$\hbar$ und β. Ermitteln Sie die Grenzwerte dieser Größen jeweils für m,ω,$\hbar$,$\beta \;\to \{ {0 \atop \infty}$. Geben Sie dafür (möglichst) physikalische Interpretationen.

Hinweis: $\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n+1} = \frac{q}{1-q^2}$ für alle $1 > q > 0$

Wert jeder Aufgabe = 5 Punkte

Abgabe: Am Montag, d. 22.05.2006, in der VL.