Prof. Dr. R. Verch
Dr. P. Marecki

UNIVERSITÄT LEIPZIG
Inst. f. Theoretische Physik
Sommersemester 2006

Übungen zur Quantenmechanik II
Aufgabenblatt 3

Aufgabe 7 Berechnen Sie die störungstheoretische Korrektur erster Ordnung für die Energieeigenwerte des harmonischen Oszillators in einer Dimension mit ungestörtem Hamiltonoperator

$$H_0 = \tfrac{1}{2m}P^2 + \tfrac{1}{2}KX^2 \,,$$

für die Störterme

(i) $H_I = bX$, $\quad b > 0$

(ii) $H_I = \frac{1}{2}mc^2X^2$, $\quad c > 0\,.$

In beiden Fällen kann die Korrektur auch exakt berechnet werden. Vergleichen Sie die exakten Lösungen mit den Ergebnissen der Störungstheorie.

Aufgabe 8 *(Stark-Effekt beim Wasserstoff)*
Betrachten Sie das Wasserstoff-Atom im äußeren konstanten elektrischen Feld $\underline{\mathcal{E}} = (0, 0, \mathcal{E})$ mit Hamiltonoperator

$$H = H_0 + e\mathcal{E}X_3 \,,$$

wobei $H_0 = \underline{P}^2/2m^* - e^2/|\underline{X}|$. Berechnen Sie in erster störungstheoretischer Ordnung die Energiewerte, die aus dem (vierfach entarteten) $n = 2$-Niveau von H_0 hervorgehen. Wie ändert sich die Entartung?

/...2

Aufgabe 9 In einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ seien H_1 und H_2 selbstadjungierte Operatoren mit gemeinsamem Definitionsbereich $\mathcal{D}$.
Die *Resolvente* von H_ℓ ist die Familie von Operatoren

$$R_\ell(\zeta) = (\zeta \mathbf{1} - H_\ell)^{-1} \,,$$

die für alle $\zeta \in \mathbb{C} \backslash \mathrm{spec}(H_\ell)$ definiert ist (und für alle diese Werte ein beschränkter Operator ist).

(a) Zeigen Sie die *erste Resolventenidentität*:

$$R_1(\zeta) - R_1(\zeta') = (\zeta - \zeta') R_1(\zeta) R_1(\zeta')$$

für alle ζ und ζ', die außerhalb des Spektrums von H_1 liegen.

(b) Zeigen Sie die *zweite Resolventenidentität*:

$$R_1(\zeta) - R_2(\zeta) = R_1(\zeta)(H_1 - H_2) R_2(\zeta)$$

für alle ζ, die ausserhalb der Spektralmengen von H_1 und H_2 liegen.

(c) Es sei ϵ ein isolierter Eigenwert von H_1 und P_ϵ sei der Projektor auf den Eigenraum $\mathcal{N}(H_1, \epsilon)$ zu diesem Eigenwert. Es sei Γ ein (positiv orientierter) geschlossener Kreisbogen in $\mathbb{C}$ um ϵ, so dass Γ keine weiteren Spektralpunkte von H_1 einschliesst oder schneidet. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$P_\epsilon = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R_1(\zeta) \, d\zeta \,.$$

Hinweis: Sie können für (c) zur Vereinfachung voraussetzen, dass H_1 ein reines Punktspektrum besitzt. Ferner dürfen Sie die Tatsache benutzen, dass $\zeta \mapsto R_1(\zeta)$ ausserhalb von $\mathrm{spec}(H_1)$ analytisch ist. Das Argument beruht auf dem Cauchyschen Integralsatz für analytische Funktionen.

Wert jeder Aufgabe = 5 Punkte.

Abgabe: Am Dienstag, den 02.05.2006, z.Hd. Dr. Marecki