Prof. Dr. R. Verch
Dr. P. Marecki

UNIVERSITÄT LEIPZIG
Inst. f. Theoretische Physik
Sommersemester 2006

Übungen zur Quantenmechanik II
Aufgabenblatt 2

Aufgabe 4
(a) Auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ sei V_1, V_2, V_3 ein Vektor-Operator bezüglich einer unitären Darstellung $\{U_R\}_{R\in \mathrm{SO}(3)}$ der Drehgruppe, d.h. $U_R V_j U_R^* = \sum_{k=1}^{3} R^{-1}_{jk} V_k$. Definieren Sie

$$T_1^{(1)} = \frac{-1}{\sqrt{2}}(V_1 + iV_2)\,, \qquad T_0^{(1)} = V_0\,, \qquad T_{-1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_1 - iV_2)\,,$$

und zeigen Sie, dass $T_q^{(1)}$, $q = 1, 0, -1$, einen irreduziblen unitären Tensor-Operator 1. Stufe bildet.

(b) Betrachten Sie auf dem Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$ die Kugelfächenfunktionen $Y_{\ell,m}$ als Multiplikationsoperatoren. Bildet dann $T_q^{(k)} = Y_{k,q}$, $q = k, k-1, \ldots, -k$, bezüglich der üblichen unitären Darstellung der Drehgruppe auf $L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$ einen irreduziblen unitären Tensor-Operator k-ter Stufe?

Aufgabe 5 Es sei $\{U_R\}_{R\in \mathrm{SO}(3)}$ eine unitäre Darstellung der Drehgruppe auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$; J_1, J_2, J_3 seien die zugehörigen Drehimpulsoperatoren und $\mathcal{H}^{(j)}$ sei der Unterraum erzeugt von den gemeinsamen orthonormierten Eigenvektoren $|j,m\rangle$ von J^2 und J_3 mit $J^2|j,m\rangle = j(j+1)|j,m\rangle$ und $J_3|j,m\rangle = m|j,m\rangle$ $(m = j, j-1, \ldots, -j)$.
Es sei V_1, V_2, V_3 ein Vektor-Operator bzgl. $\{U_R\}_{R\in \mathrm{SO}(3)}$. Zeigen Sie: Für beliebige normierte Vektoren $\phi, \psi \in \mathcal{H}^{(j)}$ gilt

$$(\phi, V_k\psi) = (\phi, J_k\psi) \cdot \frac{(\phi, \underline{J}\cdot\underline{V}\phi)}{j(j+1)} \qquad (k = 1, 2, 3)$$

mit $\underline{J}\cdot\underline{V} = \sum_\ell J_\ell V_\ell$.

Hinweis: Benutzen Sie das Wigner-Eckart-Theorem um zu zeigen, dass es eine Zahl c gibt mit

$$\langle j, m'|V_k - cJ_k|j,m\rangle = 0$$

für alle m, m', und verwenden Sie dann $J_k\mathcal{H}^{(j)} \subset \mathcal{H}^{(j)}$, um auf den Wert von c zu schliessen.

/...2

Aufgabe 6

(a) Es sei $\mathcal{P}$ der Paritätsoperator auf dem Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$, $(\mathcal{P}\psi)(\underline{x}) := \psi(-\underline{x})$. Weisen Sie die folgenden Relationen nach:

(i) $\mathcal{P}^* = \mathcal{P} = \mathcal{P}^{-1}$

(ii) $\mathcal{P}X_k\mathcal{P}^{-1} = -X_k, \quad \mathcal{P}P_k\mathcal{P}^{-1} = -P_k$

(iii) $\mathcal{P}L_j\mathcal{P}^{-1} = L_j, \quad [\mathcal{P}, L_j] = 0$

(iv) $\mathcal{P}Y_{\ell,m} = (-1)^\ell Y_{\ell,m}$.

Dabei sind: $\underline{X}$ = Ortsoperator, $\underline{P}$ = Impulsoperator, $\underline{L}$ = Drehimpulsoperator, $Y_{\ell,m}$ = Kugelflächenfunktionen.

(b) Setzen Sie $f_\alpha(r)Y_{\ell,m} \equiv |\alpha, \ell, m\rangle$, $\alpha = 1, 2$, wobei $\int |f_\alpha(r)|^2 r^2\, dr = 1$. Weisen Sie nach, dass die folgenden Aussagen gelten:

(i) $|\alpha, \ell, m\rangle$ und $X_j|\alpha, \ell, m\rangle$ sind Eigenvektoren des Paritätsoperators (zu welchem Eigenwert?)

(ii) $\langle\alpha', \ell', m'|X_j|\alpha, \ell, m\rangle = 0$ für $\ell = \ell'$

Wert jeder Aufgabe = 5 Punkte.

Abgabe: Am Montag, den 24.04.2006, in der Vorlesung