Prof. Dr. R. Verch
Dr. P. Marecki

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik
Sommersemester 2006

Übungen zur Quantenmechanik II
Aufgabenblatt 12

Aufgabe 34 *(Streuung an einem zylindersymmetrischen Potential)* [6 Punkte]
Betrachten Sie die Ladungsverteilung

$$\rho(\underline{x}) = ce\mathrm{e}^{-x_2^2/a^2}\chi_S(x_1, x_3)\,,$$

wobei χ_S die charakteristische Funktion der Kreisscheibe $\{x_1^2+x_3^2 < S^2\}$ in der x_1-x_3-Ebene ist. Dabei sind a, S positive Konstanten, c ist eine reelle Konstante und e ist die Elektronenladung.

Betrachten Sie einen einlaufenden Teilchenstrom von Elektronen der Masse m mit Impuls $\hbar\underline{k}$ in x_3-Richtung. Berechenen Sie den Formfaktor des Potentials und den Wirkungsquerschnitt in 1. Bornscher Näherung. Skizzieren Sie den Verlauf des Potentials und die Streusituation.

Aufgabe 35 *(Streuung am 3-dimensionalen Kastenpotential)* [9 Punkte]
Betrachten Sie das Kastenpotential

$$V(\underline{x}) = -V_0\chi_R(\underline{x})\,,$$

wobei χ_R die charakteristische Funktion der Kugel vom Radius $R > 0$ um den Ursprung ist.

Betrachten Sie einen einlaufenden Teilchenstrom von Elektronen der Masse m mit Impuls $\hbar\underline{k}$.

(i) Berechnen Sie die Streuphase für die s-Wellen Streuung, $\delta_0 = \delta_0(k)$ $(k = |\underline{k}|)$, und den zugehörigen s-Wellen Anteil des differentiellen Wirkungsquerschnitts.

(ii) Man definiert die *Streulänge* a durch $\lim_{k\to 0}\cot\delta_0(k) = -1/a$, und die *effektive Reichweite* des Potentials durch

$$r_0 = 2\int_0^\infty \left(|u^{(a)}(r)|^2 - |u_{0,0}(r)|^2\right) dr\,,$$

wobei $u^{(a)}(r) = 1 - r/a$ ist, und $u_{0,0}(r)$ definiert ist als die radiale Wellenfunktion für $k = 0$ und $\ell = 0$.
Zeigen Sie, dass $u_{0,0}(r)$ die Form hat

$$u_{0,0}(r) = C\sin(\beta r) \quad \text{für } r < R\,, \quad u_{0,0}(r) = 1 - r/a \quad \text{für } r > R\,,$$

wobei β sich ausdrücken lässt durch m, $\hbar$ und V_0, und C von R und β abhängt.

/...2

Berechnen Sie die Streulänge und die effektive Reichweite in Abhängigkeit von R und V_0.

(iii) Für gewisse Werte von β passiert etwas mit der Streulänge. Was passiert, und für welche β?

Hinweis: Sie können davon Gebrauch machen, dass die radialen Wellenfunktionen $u_\ell(r) = u_{k,\ell}(r)$ sich (für $k > 0$) darstellen lassen in der Form

$$\begin{aligned} u_\ell(r) &= A_\ell \sqrt{(k^2 + 2mV_0/\hbar^2)}\, j_\ell(\sqrt{(k^2 + 2mV_0/\hbar^2)}r) \quad (r < R) \\ u_\ell(r) &= B_\ell^{(+)} kr h_\ell^{(+)}(kr) + B_\ell^{(-)} kr h_\ell^{(-)}(kr) \quad (r > R) \end{aligned}$$

Die Stetigkeitsbedingungen bei $r = R$ liefern dann Beziehungen zwischen den Koeffizienten A_ℓ und $B_\ell^{(\pm)}$. Es sind $h_\ell^{(\pm)}$ die sphärischen Hankel-Funktionen, definiert durch

$$h_\ell^{(\pm)}(\rho) = (-\rho)^\ell \left(\frac{d}{\rho\, d\rho}\right)^\ell (\mathrm{e}^{\pm i\rho}/\rho)$$

mit dem asymptotischen Verhalten

$$h_\ell^{(\pm)}(\rho) \to \mathrm{e}^{\pm i(\rho - \ell\pi/2)}/\rho \quad (\rho \to \infty)$$

und j_ℓ ist die sphärische Bessel-Funktion,

$$j_\ell(\rho) = \frac{1}{2i}(h_\ell^{(+)} - h_\ell^{(-)})\,.$$

Abgabe: Am Montag, 17. Juli 2006 in der VL.

Klausurtermin: Mittwoch, 12.07.06, 16.00-19.00 Uhr, Theorie-HS