Prof. Dr. R. Verch
Dr. P. Marecki

UNIVERSITÄT LEIPZIG
Inst. f. Theoretische Physik
Sommersemester 2006

Übungen zur Quantenmechanik II
Aufgabenblatt 10

Aufgabe 28 *(Partielle Zustände)* [6 Punkte]
Es sei $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\rm A} \otimes \mathcal{H}_{\rm B}$ ein zweiteiliges Quantensystem. Für einen Zustand $\omega(X) = \mathrm{Tr}(\rho X)$, $X \in \mathsf{B}(\mathcal{H})$, bezeichnet man den Zustand $\omega_{\rm A}$, der auf dem $\mathcal{H}_{\rm A}$-System gegeben wird durch

$$\omega_{\rm A}(A) = \omega(A \otimes \mathbf{1}), \quad A \in \mathsf{B}(\mathcal{H}_{\rm A}),$$

als den **partiellen Zustand** von ω auf dem $\mathcal{H}_{\rm A}$-Teil des Systems.

(a) Wie lässt sich aus ρ eine Dichtematrix $\rho_{\rm A}$ auf $\mathcal{H}_{\rm A}$ gewinnen, so dass $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{\rm A}}(\rho_{\rm A} A) = \omega_{\rm A}(A)$ für alle $A \in \mathsf{B}(\mathcal{H}_{\rm A})$ gilt?

(b) Betrachten Sie den Fall $\mathcal{H}_{\rm A} = \mathcal{H}_{\rm B} = \mathbb{C}^2$ und $\rho = |\chi^{\wedge}_{+-}\rangle\langle\chi^{\wedge}_{+-}|$, wobei

$$\chi^{\wedge}_{+-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\binom{1}{0} \otimes \binom{0}{1} - \binom{0}{1} \otimes \binom{1}{0}\right)$$

der Singlett-Vektor ist (wird heutzutage auch häufig als "Bell-Zustand" bezeichnet). Zeigen Sie, dass in diesem Fall der partielle Zustand $\omega_{\rm A}$ kein reiner Zustand ist, sondern ein echtes Gemisch. D.h. es gibt keinen Einheitsvektor $v \in \mathbb{C}^2$ so, dass $\rho_{\rm A} = |v\rangle\langle v|$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass es in der Menge der Dichtematrizen ρ auf $\mathbb{C}^2$ genau eine gibt, für die die von Neumann-Entropie

$$S(\rho) = -k\mathrm{Tr}(\rho \ln(\rho))$$

maximal wird. Vergleichen Sie diese Entropie-maximierende Dichtematrix mit $\rho_{\rm A}$ für den Fall (b).

Aufgabe 29 + 30 (*Quanten im Spiel! – nach S. Popescu*) [9 Punkte]
Alice und Bob nehmen in einer Fernsehshow an einem Spiel teil. Das Spiel besteht aus sehr vielen Runden, die immer nach den gleichen Regeln ablaufen. Jede Runde verläuft folgendermaßen: Alice wird von einer der beiden Moderatorinnen, Skylla oder Charybdis, gebeten, mit "+" oder "–" zu antworten. Alice antwortet und es wird notiert, wer gefragt hat und wie Alice geantwortet hat. Bob erfährt nicht, wer gefragt hat und wie Alice geantwortet hat. Dann wird Bob von Skylla oder Charybdis gefragt und antwortet mit "+" oder "–". (Auch dabei erfährt Alice nicht, wer fragt und wie Bob antwortet.) Damit ist eine Spielrunde beendet, und es wird beispielsweise folgendes Ergebnis der Spielrunde protokolliert:

"Skylla fragt Alice, Alice antwortet + und Charybdis fragt Bob, Bob antwortet –"

/...2

Die weiteren Spielrunden verlaufen nach dem gleichen Muster. Das Ergebnis einer Spielrunde wird als "gültig" erklärt, wenn es einem der folgenden Fälle entspricht (dabei steht S und C für Frage von Skylla bzw. Charybdis, und dahinter die Antwort).

Alice		Bob	
C	+	C	+
C	−	C	−
C	−	S	−
C	+	S	+

Alice		Bob	
S	+	C	+
S	−	C	−
S	+	S	−
S	−	S	+

Ziel des Spiels für Alice und Bob ist es, eine möglichst hohe Erfolgsquote zu erzielen, also ein möglichst hohes Verhältnis N_G/N_R, mit $N_G =$ Anzahl der gültigen Ergebnisse, $N_R =$ Anzahl der Spielrunden (für eine große Zahl von Spielrunden).

(a) Zeigen Sie: Im statistischen Mittel (idealisiert für $N_R \to \infty$) beträgt die Erfolgsquote $1/2$.

(b) Alice und Bob wird zugestanden, sich vor Beginn des Spiels über die Antworten, die sie in den Spielrunden geben, zu verabreden. Das heisst: Sie tragen eine Liste bei sich, in der für jede (etwa die n-te) der N_R Spielrunden z.B. eine Verabredung folgender Art eingetragen ist:

Für Alice: Wenn Charybdis fragt, antworte $+$; wenn Skylla fragt, antworte $-$
Für Bob: Wenn Charybdis fragt, antworte $+$; wenn Skylla fragt, antworte $+$.

Nach wie vor erfahren Alice und Bob nicht, wer den jeweils anderen fragt und wie die Antwort ausfällt.

Zeigen Sie, dass unter diesen Bedingungen die maximale Erfolgsquote im statistischen Mittel $3/4$ beträgt.

(c) Jetzt wird angenommen, dass es eine Präparierapparatur gibt, die bei jeder Spielrunde ein polarisiertes Photonenpaar im Singlett-Zustand (entprechend $\chi^{\wedge}_{+-}$) emittiert und eines der Photonen zu Alice, das andere zu Bob sendet. Alice und Bob sind jeweils mit Apparaturen ausgestattet, mit denen sie die Polarisierungsobservablen

$$\sigma_\varphi = \cos(2\varphi)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \sin(2\varphi)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

messen können. Ausserdem dürfen sie sich, ähnlich wie bei (b), vor Beginn des Spiels darüber verständigen, welche Winkeleinstellungen φ der Polarisierungsobservablen sie benutzen, je nachdem, ob sie von Skylla oder Charybdis gefragt werden, nach dem Muster:

Für Alice: Wenn Charybdis fragt, verwende Winkeleinstellung α_c; wenn Skylla fragt, verwende Winkeleinstellung α_s

Für Bob: Wenn Charybdis fragt, verwende Winkeleinstellung β_c; wenn Skylla fragt, verwende Winkeleinstellung β_s.

Zeigen Sie, dass es Alice und Bob unter diesen Bedingungen möglich ist, ihre Erfolgsquote im statistischen Mittel auf $1/2 + \sqrt{2}/4$ zu erhöhen.

Abgabe: Am Montag, 26. Juni 2006 in der VL.