Prof. Dr. R. Verch
Dr. P. Marecki

UNIVERSITÄT LEIPZIG
Inst. f. Theoretische Physik
Sommersemester 2006

Übungen zur Quantenmechanik II
Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1 $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ seien die Hilberträume zweier Quantensysteme mit den Hamilton-operatoren $(H_1, \mathcal{D}_1)$ und $(H_2, \mathcal{D}_2)$.

(i) Es seien $U_{\ell,t} = \mathrm{e}^{-itH_\ell}$, $t \in \mathbb{R}$, die unitären Gruppen, die von den H_ℓ generiert werden, d.h. $i \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} U_{\ell,t}\psi = H_\ell \psi$ für alle $\psi \in \mathcal{D}_\ell$ $(\ell = 1, 2)$.
Zeigen Sie, dass $U_t^\otimes = U_{1,t} \otimes U_{2,t}$, $t \in \mathbb{R}$, eine unitäre Gruppe auf $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ bildet, die auf $\mathcal{D}_1 \odot \mathcal{D}_2$ von $H^\otimes = H_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes H_2$ generiert wird.

(ii) Es seien $\omega_\ell : B(\mathcal{H}_\ell) \to \mathbb{C}$ $(\ell = 1, 2)$ Zustände auf den jeweiligen Quantensystemen, d.h. es gibt positive Spurklasse-Operatoren $\varrho_\ell : \mathcal{H}_\ell \to \mathcal{H}_\ell$ mit $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\ell}(\varrho) = 1$ so, dass $\omega_\ell(A) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\ell}(\varrho_\ell A)$ für all $A \in B(\mathcal{H}_\ell)$.
Der *Produkt-Zustand* $\omega_1 \otimes \omega_2 : B(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) \to \mathbb{C}$ der Zustände ω_1 und ω_2 ist definiert durch (lineare Fortsetzung von)

$$(\omega_1 \otimes \omega_2)(A_1 \otimes A_2) = \omega_1(A_1)\omega_2(A_2)\,.$$

Gehen Sie davon aus, dass $\omega_\ell(H_\ell)$ definiert ist als $\lim_{n\to\infty} \omega_\ell(H_{\ell,n})$ mit $H_{\ell,n} \in B(\mathcal{H}_\ell)$, und zeigen Sie, dass $(\omega_1 \otimes \omega_2)(H^\otimes)$ gleich der Summe aus den Erwartungswerten von H_1 und H_2 in den Zuständen ω_1 bzw. ω_2 ist.
Zeigen Sie ferner, dass

$$(\omega_1 \otimes \omega_2)(A_1 \otimes A_2) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2}((\varrho_1 \otimes \varrho_2)(A_1 \otimes A_2))$$

für alle $A_\ell \in \mathcal{H}_\ell$ gilt.

Aufgabe 2 Das Quantensystem aus einem Proton und einem Elektron, die über das Coulomb-Potential wechselwirken, kann beschrieben werden durch den System-Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathrm{Proton}} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{Elektron}}$, wobei die jeweiligen Hilberträume die der Ortskoordinaten $\underline{x}_p$ und $\underline{x}_e$ von Proton bzw. Elektron sind (somit sind $\mathcal{H}_{\mathrm{Proton}}$ und $\mathcal{H}_{\mathrm{Elektron}}$ jeweils Kopien von $L^2(\mathbb{R}^3)$), und den Hamiltonoperator

$$(H_{\mathrm{ww}}\Psi)(\underline{x}_p, \underline{x}_e) = \left(\frac{-\hbar^2}{2m_p}\Delta_{\underline{x}_p} + \frac{-\hbar^2}{2m_e}\Delta_{\underline{x}_e} - \frac{\alpha}{|\underline{X}_p - \underline{X}_e|} \right) \Psi(\underline{x}_p, \underline{x}_e)$$

für $\Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$. ($m_p$ = Protonmasse, m_e = Elektronmasse, α = eine geeignete Konstante.)

/...2

Führen Sie die *Schwerpunktskoordinaten* $\underline{x}_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{m_p+m_e}(m_p\underline{x}_p + m_e\underline{x}_e)$ ein und die *Relativkoordinaten* $\underline{x}_r = \underline{x}_p - \underline{x}_e$. Bezeichnen Sie den L^2-Hilbertraum der $\underline{x}_{\mathrm{cm}}$-Koordinaten mit $\mathcal{H}_{\mathrm{cm}}$ und den L^2-Hilbertraum der Relativkoordinaten mit $\mathcal{H}_r$. Betrachten Sie die Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, die durch

$$T : \begin{pmatrix} \underline{x}_p \\ \underline{x}_e \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \underline{x}_{\mathrm{cm}} \\ \underline{x}_r \end{pmatrix}$$

erklärt wird, und die Abbildung $U : L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \to L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$, die definiert ist durch

$$(U\Psi)(\underline{x}_{\mathrm{cm}}, \underline{x}_r) = \Psi \circ T^{-1}(\underline{x}_{\mathrm{cm}}, \underline{x}_r)\,.$$

Zeigen Sie, dass U eine unitäre Abbildung von $\mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_e$ auf $\mathcal{H}_{\mathrm{cm}} \otimes \mathcal{H}_r$ definiert. Zeigen Sie ausserdem, dass (auf allen $\Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$) gilt

$$H_{\mathrm{ww}}\Psi = U^{-1} H_{\otimes} U \Psi\,,$$

wobei

$$(H_{\otimes}\Phi)(\underline{x}_{\mathrm{cm}}, \underline{x}_r) = \left(\frac{-\hbar^2}{2(m_p+m_e)} \Delta_{\underline{x}_{\mathrm{cm}}} + \frac{-\hbar^2}{2m^*} \Delta_{\underline{x}_r} - \frac{\alpha}{|\underline{X}_r|} \right) \Phi(\underline{x}_{\mathrm{cm}}, \underline{x}_r)$$

mit $m^* = m_p m_e/(m_p + m_e)$ (reduzierte Masse).

Aufgabe 3 Ein quantenmechanisches System mit Drehimpuls $j_1 = 1$ wird gekoppelt mit einem quantenmechanischen System mit Spin $j_2 = 1/2$. Berechnen Sie die Clebsch-Gordan-Koeffizienten $C^{j}_{j_1 j_2}(m_1, m_1; m)$ und geben Sie die gemeinsamen orthonormierten Eigenvektoren $|j_1, j_2; j, m\rangle$ von J^2 und J_3 für den Gesamtdrehimpuls des gekoppelten Systems explizit als Linearkombinationen der Vektoren $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_1, m_2\rangle$ an.

Wert jeder Aufgabe = 5 Punkte.

Abgabe: Bis Dienstag, den 18.04.2006, 12.00 Uhr bei Dr. Marecki (Postfach im ITP).

Bis auf weiteres: Einzelabgabe der bearbeiteten Übungsaufgaben.